

非線形光学結晶設置型重力波検出器の原理と 光学損失の振る舞い

東京工業大学 理学院物理学系物理学コース 宗宮研究室
16M00733 柳沼 拓哉

2018 年 2 月 8 日

Contents

1	重力波検出器	9
1.1	重力波	9
1.1.1	アインシュタイン方程式	9
1.1.2	Gauge 変換と線形化	10
1.1.3	重力波の伝播と自由度	14
1.1.4	自由質点に対する重力波の影響	16
1.2	重力波源	17
1.3	重力波検出器の概要	18
1.3.1	レーザー干渉型検出器	18
1.3.2	Michelson 干渉計の基本原理	19
1.4	重力波検出器における雑音	21
1.4.1	位相雑音	21
1.4.2	変位雑音	22
1.4.3	雑音と本研究背景	23
2	重力波検出器の量子雑音	27
2.1	電磁場の量子化	27
2.1.1	第二量子化	27
2.1.2	共振器における場の量子化	30
2.2	Michelson 干渉計とその感度	31
2.2.1	Beam Splitter 近傍の場	32
2.2.2	Sideband	33
2.2.3	Michelson 干渉計の Arm 部分	34
2.2.4	輻射圧ゆらぎ	35
2.2.5	Michelson 干渉計の Input-output relation	37
2.2.6	信号雑音比	38
2.2.7	Noise Spectral density と Ponderomotive Squeezing	39
2.2.8	Homodyne Detection	42
2.2.9	雑音楕円の面積	43
2.3	Signal Recycling Michelson 干渉計	45
2.3.1	Input-output relation	45
2.3.2	雑音スペクトルと楕円の面積	47
2.3.3	感度曲線と光ばね	47

3	次世代型重力波検出器	53
3.1	非線形光学効果	53
3.1.1	非線形光学における電気感受率	53
3.1.2	非線形光学過程	54
3.1.3	OPA と信号増幅	55
3.2	非線形光学結晶設置型重力波検出器	56
3.2.1	Input-output relation	56
3.2.2	雑音スペクトルと楕円の面積	58
3.2.3	感度曲線と光ばね	58
3.2.4	従来の検出軸における感度限界	60
3.3	Input Squeezing SR Michelson 干渉計	62
3.3.1	Squeezed Input	62
3.3.2	感度曲線	63
4	光学損失の影響	67
4.1	Input-output relation	67
4.1.1	Michelson 干渉計の Input-output relation	67
4.1.2	NLC を含めた Input-output relation	72
4.1.3	結果	75
4.2	感度曲線	77
4.2.1	SR Michelson 干渉計と Input Squeezing Michelson 干渉計	77
4.2.2	非線形光学結晶設置型重力波検出器	79
4.3	Noise ellipse	81
4.3.1	真空場の振る舞い	81
4.3.2	ロス真空場の面積	83
4.4	光学損失による影響のまとめ	84
5	議論	85
5.1	Noise ellipse の傾き	85
5.1.1	光ばね行列のはたらき	85
5.1.2	optimal Homodyne angle	87
5.2	Input Squeezing SR 干渉計との比較結果について	88
5.2.1	NLC 設置型の評価	88
5.2.2	Input Squeezing の評価	89
5.3	NLC ロス真空場の面積	91
5.3.1	面積の増大	92
5.3.2	loss port の Input-output relation	93
6	結論	97

はじめに

2016 年 2 月にアメリカの重力波検出器 Advanced LIGO が重力波の世界初検出を発表した。重力波とは、大質量を持った天体の加速度運動によって生じる時空のさざ波である。今後の重力波天文学開拓のために、より高感度でコンスタントに数多くの重力波を検出できる次世代型重力波検出器の開発が望まれている。しかし、重力波の起こす差動変位は非常に小さいため、重力波の直接検出では信号雑音比の向上が重要となる。

重力波検出器における雑音は地面雑音、熱雑音、量子雑音にわかれており、中・高周波数帯の感度は量子雑音によって制限されている。Advanced LIGO をはじめとする世界の重力波検出器は 100Hz 付近に最大感度を持っており、Binary Black Hole に特化した周波数設定となっている。これに対し、高周波数帯には中性子星連星合体やその後の固有振動、超新星爆発など未知の重力波があり、高周波数帯の感度を向上させるモチベーションとなる。この量子雑音は、入力真空場のスクイーミングによって劇的に改善することが可能である。スクイーミングとは、真空場も含めた電磁場が持っている「振幅揺らぎ」と「位相揺らぎ」について、最小不確定状態を保ちながらその比を変更させる技術である。しかし、スクイーミングを用いた感度向上は光学損失に弱く、検出帯域の変更はほぼ不可能であるという特徴を持っている。光学損失とは検出器の感度向上を妨げる要因の 1 つであり、鏡における吸収や散乱によって生じる。この光学損失は重力波検出器における新たな量子雑音源となり、Michelson 干渉計の信号雑音比を劇的に改善する手法であるスクイーミングの利点を潰してしまう。

そこで弊研究室では、光学損失に強い次世代型重力波検出器として、スクイーミングを信号増幅に利用した非線形光学結晶設置型重力波検出器を考案した。この検出器は、Signal Recycling 共振器を detune した際に生じる「光ばね」を非線形光学効果で固くすることにより、高周波数帯 (kHz 帯) の感度を向上させる利点を持っている。また、光学損失の影響に弱いスクイーミングの欠点を取り除くことができると言われていた。しかし、この光学損失の解析的な計算は難解であり、今まで未着手の問題であった。

本修士論文ではこの理論部分の穴を埋めるため、まず光学損失を含めた非線形光学結晶設置型重力波検出器の Input-output relation を導出した。また、従来の雑音減少型重力波検出器における光学損失の振る舞いと、我々の信号増幅型重力波検出器の光学損失の振る舞いを比較することで、我々の系の性能を評価した。

結論として、非線形光学効果を信号増幅に用いた重力波検出器は、雑音減少型の重力波検出器と同様に雑音の低減を利用していることが示された。また、共振器内で混入した光学損失の大きさはその入射強度より増幅される特徴を持っていることがわかった。しかし、非線形光学効果を用いた光ばねの硬化によって全ての光学損失真空場を一樣にスクイーズすることが可能となり、Lossy な状況下でも高周波数帯で標準量子限

界を超える干渉計であることが示された。

構成として、第1章では重力波と検出器の概要を述べる。第2章では two photon formalism[5] を用いた検出器感度の計算方法や様々な感度向上手法を説明する。第3章では非線形光学結晶設置型重力波検出器と Input Squeezing SR Michelson 干渉計の Spectral Density を求め、Squeezing 強度を変化させた際の振る舞いを見る。第4章が本修士論文の中心であり、光学損失を含めた場合にはどのような計算を行えばよいか、第3章の結果がどのように変化するのか求める。最後に第4章の結果を第5章で議論し、第6章でまとめを行う。

Abstract

On February 11th 2016, LIGO, one of the gravitational wave observatories, announced they had succeeded in the first direct detection of a gravitational wave. Gravitational waves are generated by accelerated motions of astronomical objects, and are called "the ripple in space-time". To pioneer Gravitational-Wave Astronomy, it is desired for gravitational wave detectors to be upgraded so that we can detect much more signals of gravitational waves. We have to improve signal to noise ratio because a strain amplitude of gravitational wave is so tiny.

The noises of the detectors are divided into three classes: Seismic noise, thermal noise and quantum noise. Around 100Hz, where there are the gravitational wave signal of BBH, is a sweet spot of on the ground detectors like Advanced LIGO. In contrast, there are signals of BNS and supernova in high frequency, which motivates us to improve the signal to noise ratio there. We can improve quantum noise by using "squeezing" technics. Squeezing is to change the ratio between amplitude fluctuation and phase fluctuation under minimum uncertainty state. However, improvement by squeezing is strongly influenced by optical losses and does not change the sweet frequency. Optical loss is one of the reasons impedes the improvement. Absorption and scatters at mirrors generate optical losses. Optical losses became a new source of quantum noise and interfere with improvement by squeezing.

In my study, I focus on the high-frequency sensitivity of a next-generation gravitational wave detector which uses squeezing for not decreasing the noises but amplifying the signal of GWs. We can get a stiff optical spring by a non-linear effect, so the resonant frequency of optical spring gets higher. This new detector can improve the high-frequency sensitivity, however, the analytical calculation of optical losses has not been done for a long time.

First, I calculate the input-output relation of this detector under lossy condition. And next, I evaluate the performance of this detector by comparing the behavior of input squeezing SR interferometer with that of our detector.

As a result, I find that our detector also depends on the reduction of noises like input squeezing SR interferometer and the area, which is equivalent to the fluctuation magnitude, of optical losses is also amplified. However, we can achieve surpassing the SQL even if the optical losses are included because the stiff optical spring makes it possible to squeeze all of the vacuum in the same direction.

Chapter 1

重力波検出器

1.1 重力波

1.1.1 アインシュタイン方程式

一般相対性理論において、座標は時間座標 $x^0 = ct$ 、空間座標 $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ の4つからなる x^μ で記述される¹。4次元時空における x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ の間の線素 ds^2 は

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.1)$$

で表される。ただし、 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソルと呼ばれ、リーマン幾何学において空間内の距離と角度を定義する。

重力場のない平坦な時空（Minkowski 時空）においては、 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ となる。ただし、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

G を重力定数、 $T_{\mu\nu}$ をエネルギー運動量テンソルとすると、重力場のある時空において、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は Einstein 方程式

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.3)$$

に従う。右辺において、 $T_{\mu\nu}$ は物質場の分布を記述する指標となる量である。左辺において、 $G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソルと呼ばれ、以下の式で定義される：

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (1.4)$$

ここで、 $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソルを、 R はリッチスカラーを表し、リーマンテンソル $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ を用いて次のように定義される：

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}, \quad R = R^\alpha_\alpha = g^{\mu\alpha} R_{\mu\alpha}. \quad (1.5)$$

¹本章において、 α や μ などギリシャ文字の添字は 0, 1, 2, 3 を、 i, j, k などのローマ字の添字は 1, 2, 3 を表すこととする。

リーマンテンソル $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ は時空の曲率を表すテンソルであり、その定義式は

$$R^\mu_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^\gamma_{\nu\beta}\Gamma^\mu_{\gamma\alpha} - \Gamma^\gamma_{\nu\alpha}\Gamma^\mu_{\gamma\beta} \quad (1.6)$$

で与えられている。式 (1.6) において、 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ はクリストッフェル記号と呼ばれ、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \quad (1.7)$$

と定義される。これらの定義式においてはアインシュタインの縮約記法²を用い、また座標成分 x^ν についての偏微分 $\partial/\partial x^\nu \equiv \partial_\nu$ を

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu \equiv A_{\mu,\nu}$$

で表している。次節はこれらの式から出発し、アインシュタイン方程式の線形化を行う。

1.1.2 Gauge 変換と線形化

重力場が弱い場合、すなわち時空の歪みが非常に小さい場合について考える。時空の歪みが非常に小さい場合、時空の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は、平坦な時空の計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ と平坦からのずれを表す計量テンソル $h_{\mu\nu}$ の和で書かれる³：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad . \quad (1.8)$$

上式における $h_{\mu\nu}$ は、重力場の存在によって生じる平坦な時空からのずれを表すため、重力波の式を求めるために重要な項となる。アインシュタイン方程式の線形化とは、 $h_{\mu\nu}$ を重力波と見做した上でゲージ変換や適切な条件設定などを用い、式 (1.3) を $h_{\mu\nu}$ の波動方程式の形に変形するプロセスのことである。

$G_{\mu\nu}$ を $h_{\mu\nu}$ で表すために、式 (1.5), (1.6), (1.7) に (1.8) を代入し、整理する。まずクリストッフェル記号 $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ について計算すると⁴

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\nu\alpha}(g_{\alpha\nu,\lambda} + g_{\alpha\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\alpha}) \\ &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\alpha} - h^{\mu\alpha})(h_{\alpha\nu,\lambda} + h_{\alpha\lambda,\nu} - h_{\nu\lambda,\alpha}) \quad (\because \eta_{\mu\nu,\alpha} = 0) \\ &\simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\alpha}(h_{\alpha\nu,\lambda} + h_{\alpha\lambda,\nu} - h_{\nu\lambda,\alpha}) \quad . \end{aligned} \quad (1.9)$$

ただし、第一行から第二行への変形では

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

²上下に現れる添字については和を取る。

³ h の 1 次までを考慮するこの近似下では、添字の上げ下げに $\eta_{\mu\nu}$ を用いることができる。

⁴平坦な時空からのずれが非常に小さいため、 $h_{\mu\nu}$ の 2 次の項を無視できる。厳密には $h_{\mu\nu}$ と $h_{\mu\nu,\lambda}$ の積だが、平坦な時空からの微小なずれは非常に緩やかな傾きを持つと推測できるため、 $|h_{\mu\nu,\lambda}| \ll 1$ と仮定している。

を用いた．これは，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ について，上付きの $g^{\mu\nu}$ はその逆行列で表されることにより，

$$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}$$

となることから確認できる． $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ を $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ の定義式 (1.6) に代入すると，

$$\begin{aligned} R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} &= \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} + \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta}\Gamma^{\mu}_{\gamma\alpha} - \Gamma^{\gamma}_{\nu\alpha}\Gamma^{\mu}_{\gamma\beta} \\ &\simeq \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\nu,\beta} + h_{\sigma\beta,\nu} - h_{\nu\beta,\sigma})_{,\alpha} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\nu,\alpha} + h_{\sigma\alpha,\nu} - h_{\nu\alpha,\sigma})_{,\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\nu\alpha} - h_{\nu\beta,\sigma\alpha} - h_{\sigma\alpha,\nu\beta} + h_{\nu\alpha,\sigma\beta}) \end{aligned} \quad (1.10)$$

が得られる．したがって，リッチテンソルとリッチスカラーはそれぞれ次のように計算できる：

$$\begin{aligned} R_{\nu\beta} &= R^{\mu}_{\nu\mu\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\nu\mu} - h_{\nu\beta,\sigma\mu} - h_{\sigma\mu,\nu\beta} + h_{\nu\mu,\sigma\beta}) , \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} R &= R^{\alpha}_{\beta} = \eta^{\nu\beta}R_{\nu\beta} \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\nu\alpha} - h_{\nu\beta,\sigma\alpha} - h_{\sigma\alpha,\nu\beta} + h_{\nu\alpha,\sigma\beta}) . \end{aligned} \quad (1.12)$$

これらをアインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ の定義式 (1.4) に代入し，整理すると

$$G_{\nu\beta} \simeq \frac{1}{2} \{ h^{\delta}_{\beta,\nu\delta} + h^{\delta}_{\nu,\beta\delta} - \square h_{\nu\beta} - h_{,\nu\beta} - \eta_{\nu\beta}(h^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma} - \square h) \} \quad (1.13)$$

となる．上式の導出では，

$$\begin{aligned} h &= h^{\mu}_{\mu} = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \\ h_{\mu\nu} &= h_{\nu\mu} \\ \square &= \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} = \partial^{\mu}_{,\mu} \end{aligned}$$

の関係式を用いた．ここで，

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (1.14)$$

のように $h_{\mu\nu}$ のトレース反転テンソル $\bar{h}_{\mu\nu}$ を定義し，アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ を $\bar{h}_{\mu\nu}$ で記述すると

$$G_{\nu\beta} = \frac{1}{2} (\bar{h}^{\delta}_{\beta,\nu\delta} + \bar{h}^{\delta}_{\nu,\beta\delta} - \square \bar{h}_{\nu\beta} - \eta_{\nu\beta}h^{\delta\sigma}_{,\delta\sigma}) \quad (1.15)$$

と書ける．

式 (1.15) のままだとアインシュタインテンソルが複雑なままであり，線形化はできていない．そこで，調和条件とゲージ変換を用いて式を簡易化する．まず，以下のような無限小座標変換を考える：

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x) . \quad (1.16)$$

この座標変換のもとで、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は以下のように変換される：

$$\begin{aligned}
 g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} \\
 &= \partial'_\mu(x'^\alpha - \xi^\alpha) \cdot \partial'_\nu(x'^\beta - \xi^\beta) \cdot (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
 &= (\delta_\mu^\alpha - \partial'_\mu \xi^\alpha)(\delta_\nu^\beta - \partial'_\nu \xi^\beta)(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
 &= (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta - \delta_\mu^\alpha \partial'_\nu \xi^\beta - \delta_\nu^\beta \partial'_\mu \xi^\alpha + \partial'_\mu \xi^\alpha \partial'_\nu \xi^\beta)(\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
 &\simeq \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial'_\nu \xi_\mu - \partial'_\mu \xi_\nu .
 \end{aligned}$$

$\eta_{\mu\nu} = \eta'_{\mu\nu}$ より⁵，この座標変換のもとで平坦な時空からのずれ $h'_{\mu\nu}$ は

$$h'_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \partial'_\nu \xi_\mu - \partial'_\mu \xi_\nu \quad (1.17)$$

で表されることがわかる．このとき，

$$\begin{aligned}
 h' &= \eta^{\mu\nu} h'_{\mu\nu} = h - \partial'_\nu \xi^\nu - \partial'_\mu \xi^\mu \\
 &= h - 2\partial'_\delta \xi^\delta
 \end{aligned} \quad (1.18)$$

と計算できる．これを式(1.10)に代入し，座標変換後のリーマンテンソルを計算すると，

$$\begin{aligned}
 R'^\mu_{\nu\alpha\beta} &\simeq \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} (h'_{\sigma\beta,\alpha\nu} - h'_{\nu\beta,\alpha\sigma} - h'_{\sigma\alpha,\beta\nu} + h'_{\nu\alpha,\beta\sigma}) \\
 &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} \{ (h_{\sigma\beta} - \xi_{\sigma,\beta} - \xi_{\beta,\sigma})_{,\alpha\nu} - (h_{\nu\beta} - \xi_{\nu,\beta} - \xi_{\beta,\nu})_{,\alpha\sigma} \\
 &\quad (h_{\sigma\alpha} - \xi_{\sigma,\alpha} - \xi_{\alpha,\sigma})_{,\beta\nu} + (h_{\nu\alpha} - \xi_{\nu,\alpha} - \xi_{\alpha,\nu})_{,\beta\sigma} \} \\
 &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\alpha} (h_{\sigma\beta,\alpha\nu} - h_{\nu\beta,\alpha\sigma} - h_{\sigma\alpha,\beta\nu} + h_{\nu\alpha,\beta\sigma})
 \end{aligned}$$

となり，式(1.10)の結果と比較すれば，

$$R'^\mu_{\nu\alpha\beta} = R'^\mu_{\nu\alpha\beta} . \quad (1.19)$$

したがって，無限小座標変換(1.16)のもとでリーマンテンソルは不変であることがわかる．ここで，式(1.16)のような座標変換のもとで，ある物理量が不変である例として，電磁場の Gauge 変換が挙げられる．電磁場のベクトルポテンシャルを $\mathbb{A}$ ，スカラーポテンシャルを ϕ ，微分可能な任意の関数を $f(x, t)$ とし，

$$\mathbb{A}' = \mathbb{A} + \nabla f(x, t), \quad \phi' = \phi - \partial_t f$$

のような新しいベクトルポテンシャル，スカラーポテンシャルを与えると，Maxwell 方程式より

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}' &= \mathbb{E} = -\nabla \phi - \partial_t \mathbb{A} , \\
 \mathbb{B}' &= \mathbb{B} = \nabla \times \mathbb{A}
 \end{aligned}$$

⁵ η は Euclid 計量であるため，無限小座標変換(1.16)のもとで不変である．

という結果が得られる．すなわち， $(\phi, \mathbb{A})$ であっても $(\phi', \mathbb{A}')$ であっても物理量 $(\mathbb{E}, \mathbb{B})$ は実現され，そこには $f(x, t)$ の不定性が残る．このような不定性 f を利用した，ある物理量 $(\mathbb{E}, \mathbb{B})$ を不変とするような $(\phi, \mathbb{A})$ から $(\phi', \mathbb{A}')$ への変換を電磁場での Gauge 変換と呼んだのであった．これに倣い，ある物理量 $R^\mu_{\nu\alpha\beta}$ を不変とするような x^μ から x'^μ への変換を相対論における Gauge 変換と定義する．この Gauge 変換を用いてトレース反転テンソル $\bar{h}'^{\mu\nu}$ を計算すると

$$\begin{aligned}\bar{h}'^{\mu\nu} &= h'^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h' \\ &= (h_{\mu\nu} - \partial'_\mu\xi_\nu - \partial'_\nu\xi_\mu) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}(h - 2\partial'_\alpha\xi^\alpha) \\ &= (h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h) - \partial'_\mu\xi_\nu - \partial'_\nu\xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial'_\alpha\xi^\alpha \\ &= \bar{h}_{\mu\nu} - \partial'_\mu\xi_\nu - \partial'_\nu\xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\partial'_\alpha\xi^\alpha.\end{aligned}\tag{1.20}$$

また，

$$\begin{aligned}\bar{h}'^\mu{}_{\nu,\mu} &= \eta^{\mu\alpha}\bar{h}'_{\alpha\nu,\mu} = \eta^{\mu\alpha}(\bar{h}_{\alpha\nu} - \partial'_\alpha\xi_\nu - \partial'_\nu\xi_\alpha + \eta_{\alpha\nu}\partial'_\sigma\xi^\sigma)_{,\mu} \\ &= \bar{h}^\mu{}_{\nu,\mu} - \partial'^\mu\partial'_\mu\xi_\nu - \partial'_\nu\partial'_\mu\xi^\mu + \delta^\mu_\nu\partial'_\sigma\partial'_\mu\xi^\sigma \\ &= \bar{h}^\mu{}_{\nu,\mu} - \square\xi_\nu - \partial'_\nu\partial'_\mu\xi^\mu + \partial'_\sigma\partial'_\nu\xi^\sigma \\ &= \bar{h}^\mu{}_{\nu,\mu} - \square\xi_\nu\end{aligned}\tag{1.21}$$

となるので，Gauge 変換のもとで⁶ 適当な $\xi^\mu(x)$ ，すなわち

$$\square\xi_\nu = \bar{h}^\mu{}_{\nu,\mu}\tag{1.22}$$

を満たす $\xi(x)$ を選べば，常に

$$\bar{h}'^\mu{}_{\nu,\mu} = 0\tag{1.23}$$

とできる．式 (1.23) は調和条件と呼ばれている．さらに式の見通しを良くするために，Gauge 条件として Lorentz Gauge 条件

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0\tag{1.24}$$

を課すと⁷，式 (1.15) より，アインシュタインテンソルはトレース反転テンソル $\bar{h}$ を用いて

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu}\tag{1.25}$$

と書かれる．このとき，アインシュタイン方程式は

$$-\frac{1}{2}\square\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

と変形され，

$$\therefore \square\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}\tag{1.26}$$

⁶ リーマンテンソルを不変とした無限小座標変換下で，という意味である．

⁷ 式 (1.24) 以降ではこの Gauge のもとで議論を進めるものとし，差別化のためにつけていた' を消去している．

が得られる。これが線形化されたアインシュタイン方程式であり、特に真空中では $T_{\mu\nu} = 0$ なので、

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 . \quad (1.27)$$

この波動方程式を解けば重力波の伝播を表す式が得られる。

1.1.3 重力波の伝播と自由度

式 (1.27) の解として、単色平面波を考える：

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) . \quad (1.28)$$

(1.28) が線形化されたアインシュタイン方程式 (1.27) と Lorentz Gauge 条件 (1.24) を満たすためには、以下の 2 式を満たす必要がある：

$$A_{\mu\nu} k^\nu = 0 , \quad (1.29)$$

$$k_\mu k^\mu = 0 . \quad (1.30)$$

(1.29) については、単色平面波解 (1.28) を Lorentz Gauge 条件式 (1.24) に代入すれば求められる：

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{h}_{,\nu}^{\mu\nu} \\ &= \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \partial_\nu \bar{h}_{\alpha\beta} \\ &= \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \partial_\nu A_{\alpha\beta} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ &= \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} A_{\alpha\beta} \delta_\nu^\tau (ik_\tau) \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ &= i \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} A_{\alpha\beta} k_\nu \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ &= i \eta^{\mu\alpha} A_{\alpha\beta} k^\beta \exp(ik_\sigma x^\sigma) , \\ &\therefore A_{\alpha\beta} k^\beta = 0 . \end{aligned}$$

また、式 (1.30) については (1.28) を真空における線形アインシュタイン方程式 (1.27) に代入すれば得られる：

$$\begin{aligned} 0 &= \square \bar{h}^{\mu\nu} \\ &= \partial_\alpha \partial^\alpha A_{\mu\nu} \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ &= A_{\mu\nu} \partial^\alpha \delta_\alpha^\tau (ik_\tau) \delta_\alpha^\tau \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ &= i A_{\mu\nu} k_\alpha \partial^\alpha \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ &= i A_{\mu\nu} k_\alpha \eta^{\alpha\gamma} \partial_\gamma \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ &= i A_{\mu\nu} k_\alpha \eta^{\alpha\gamma} \delta_\gamma^\delta (ik_\delta) \exp(ik_\sigma x^\sigma) \\ &= -A_{\mu\nu} k_\alpha k^\alpha \exp(ik_\sigma x^\sigma) . \end{aligned}$$

上式は任意の μ, ν で成り立たねばならず、任意の μ, ν について $A_{\mu\nu} = 0$ は成り立たないため、

$$k_\alpha k^\alpha = 0$$

である必要がある．式 (1.30) は，4次元波数ベクトル k_μ がヌルベクトル⁸であることを表している．

Lorentz Gauge 条件 (1.24) を課しても座標の取り方には任意性が残る．重力波の有名なモードを導出するためには，慣習的に Transverse Traceless Gauge 条件が用いられる：

$$A_{\mu\nu}U^\nu = (\text{Transverse}) \quad (1.31)$$

$$A^\alpha_\alpha = 0 \quad (\text{Traceless}) . \quad (1.32)$$

ここで， U^ν は任意の時間的な単位ベクトルである． $U^\nu = \delta_0^\nu$ とし，重力波の進行方向を z 軸方向にとると，4次元波数ベクトル k_α は

$$k_\alpha = (-k, 0, 0, +k), (+k, 0, 0, -k) \quad (1.33)$$

と書くことができる．これは z 方向からの進行波であるという条件から $(\square, 0, 0, \pm k)$ が定まり，さらに $k_\alpha k^\alpha = 0$ の条件より第0成分が $\mp k$ であることがわかる．式 (1.33) の波数ベクトル $(+k, 0, 0, -k)$ より，式 (1.28) を計算すると⁹

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= A_{\mu\nu} \exp(ik_\alpha x^\alpha) \\ &= A_{\mu\nu} \exp[i(ckt - kz)] \\ &= A_{\mu\nu} \exp[ik(ct - z)] , \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{h}_+ & \bar{h}_\times & 0 \\ 0 & \bar{h}_\times & -\bar{h}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.35)$$

ここで， $A_{11} = \bar{h}_+$ ， $A_{12} = \bar{h}_\times$ としている．これは重力波が2つの自由度 $\bar{h}_+$ ， $\bar{h}_\times$ を持つことを示している．

$A_{\mu\nu}$ の成分の導出は以下の通りである． $A_{\mu\nu}$ に関する条件は

$$\begin{cases} A_{\mu\nu}k^\nu = 0 \\ A^\alpha_\alpha = 0 \\ A_{\mu\nu}U^\nu = 0 \end{cases}$$

であり，これを計算すると

$$\begin{cases} -k(A_{\mu 0} + A_{\mu 3}) = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

$$\begin{cases} -A_{00} + A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

$$\begin{cases} A_{\mu 0} = 0 \end{cases} \quad (1.38)$$

となる．(1.38)，(1.36) より $A_{\mu 0} = 0$ ， $A_{\mu 3} = 0$ であり，

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{01} & A_{02} & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

⁸大きさがゼロのベクトルのことである．

⁹ここでは物理学の慣習に従って，位相における t の係数が正である波数ベクトルを選択している．

が定まる．さらにトレースレス条件 (1.37) から

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{01} & A_{02} & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{21} & -A_{11} & 0 \\ 0 & A_{31} & A_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

となる．また， $g_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ の対称性から，

$$h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu} .$$

よって

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\nu\mu}$$

が成り立つため， $A_{\mu\nu}$ も添え字の入れ替えについて対称である．これより

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と定まり， $A_{11} = h_+$ ， $A_{12} = h_\times$ とおけば，式 (1.35) が求まる．

1.1.4 自由質点に対する重力波の影響

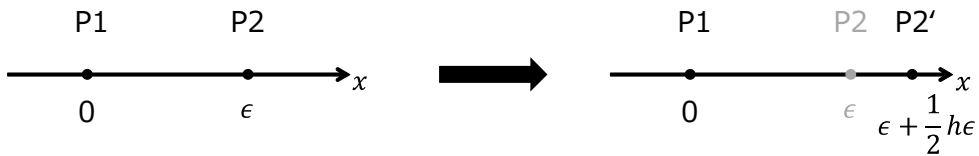


Figure 1.1: 自由質点 P_1 , P_2 と重力波による影響．重力波が入射することによって計量が $h_{\mu\nu}$ だけずれ， P_2 が P_2' に移ることがわかる．ここで，前小節の h_+ を単に h と置き換えている．

本小節では，2つの近接した自由質点 P_1 , P_2 間の固有距離が，重力波の入射によってどのように変動するのかについて述べる．TT gauge 上での座標をそれぞれ $P_1 (0, 0, 0)$ ， $P_2 (\epsilon, 0, 0)$ とする．ここで，近接した自由質点である条件として $|\epsilon| \ll 1$ と仮定し，重力波の影響により質点間の距離は x 軸方向に変動する（図 1.1）として計算する．この

とき 2 点間の距離は

$$\begin{aligned}
 \int_{P_1}^{P_2} ds &= \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\
 &= \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{g_{xx} dx^2} \\
 &= \int_0^\epsilon dx \sqrt{g_{xx}} \quad (dx > 0 \text{ とした}) \\
 &\simeq \sqrt{g_{xx}(P_1)} \epsilon \\
 &= \sqrt{\eta_{xx}(P_1) + h_{xx}(P_1)} \epsilon \\
 &= \sqrt{1 + h_{xx}(P_1)} \epsilon \\
 &\simeq \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}(P_1) \right] \epsilon .
 \end{aligned}$$

ここで、平坦な時空からの歪み h は非常に小さく ($h \ll 1$)、近接した P_1, P_2 における計量 g はほぼ変わらないとした。 P_1 の位置を固定して、 P_2 にいた自由質点が P'_2 に移動したと考えれば、重力波の入射によって変動した自由質点間の距離 Δx は

$$\Delta x = P_1 P_2 - P_1 P'_2 = \frac{1}{2} h_{xx}(P_1) \epsilon \quad (1.39)$$

と書ける。以降では + モード、すなわち $h_{xx} = h_+$ についてのみ扱うため¹⁰、簡単に

$$h = h_{xx} = h_+$$

と置く。したがって、もとの距離が ϵ であった場合の重力波による空間距離の変動は

$$\Delta x(\epsilon) = \frac{1}{2} h \epsilon \quad (1.40)$$

となることがわかる。特に Michelson 干渉計では、 $\epsilon = L$ であり¹¹、かつ腕の差動変位をとる。このため、ある周波数 Ω を持つ重力波 $h(\Omega)$ が Michelson 干渉計に及ぼす影響は、その差動変位 Δx_{MIdif} に対して

$$\Delta x_{\text{MIdif}} = 2\Delta x(L) = Lh \quad (1.41)$$

と書くことができる。

1.2 重力波源

前節では重力波の発生について導出した。本節では、重力波を発生させる天体について簡単に述べる。代表的な重力波源として、中性子星連星 (Binary Neutron Star : BNS) の合体や連星ブラックホール (Binary Black Hole : BBH) が挙げられる。これら連星

¹⁰+ モードとは、自由質点間の距離を四重極に変動させる重力波のモードである。× モード： $h_\times$ は + モードの位置変動作用を 45 度回転させれば良いため、今後は + モードのみ扱う。

¹¹ここで、重力波の波長 λ に比べ、Michelson 干渉計の腕の長さ L は十分に小さいことを用いている。

の合体プロセスは、以下に記述するように、Inspiral, Merger, Ringdown の3つにわけられる。はじめ、連星を形成する2つの天体は、エネルギーを放出しながら、すなわち重力波を発生させながら連星軌道を回っている。連星は重力波を放出しながら次第にエネルギーを失い、したがってその軌道は段々と小さくなっていく。この過程を Inspiral と呼ぶ。Inspiral の過程において重力波の周波数は増加し、結果として重力波信号はチャープ信号となる。次に、軌道の縮小によって天体間の距離が縮まった連星は、強い相互作用を及ぼし合うようになり、やがて衝突する。これを Merger と呼ぶ。最終的に、2つの天体で構成されていた連星は新しい1つの天体を形成し、天体固有の減衰振動を描く重力波を放出することが知られている (Ringdown process)。アメリカの重力波検出器 Advanced LIGO における重力波初観測イベント [2] はまさに BBH の合体であり、2017年8月には中性子星連星による重力波が初観測されている [1]。

未だ検出されていないその他の重力波源としては、重力波背景輻射や超新星爆発による重力波バーストなどが存在するが、そのどれもが非常に小さい振幅と相互作用効果を持っており、重力波の直接検出における困難は依然として存在している。特に、高周波数帯の重力波源としては「中性子星連星合体における Ringdown¹²」「パルサーグリッチ」「超新星爆発」などが挙げられるが、高周波数帯における重力波検出器の感度は後述する shot 雑音によって制限されており、検出は困難を極める。高周波数帯における重力波検出を実現するためには、干渉計の信号雑音比を改善する、すなわち干渉計雑音を下げるか信号を増幅する必要がある。

1.3 重力波検出器の概要

1.3.1 レーザー干渉型検出器

重力波の微小な相互作用効果を観測するために、様々な実験方法と検出機構が考案されてきた。その中でも特に有名である検出機構がレーザー干渉型重力波検出器である。

レーザー干渉型重力波検出器では、重力波とレーザー電磁場の相互作用を利用して重力波を検出する。詳しくは2.2節で述べるが、原理としては Michelson 干渉計を利用する (図 1.2)。レーザーを出た光が Beam Splitter (BS) によって2つの方向 (east 方向と north 方向) へ分けられ、End Test Mass (ETM) で反射され、Beam Splitter 上で再び干渉する。east 方向と north 方向の光路差が波長の整数倍にセットされている場合、Beam Splitter の符号により、レーザー側 (bright port) では光が強め合い、光検出器側 (dark port) では光が打ち消し合う。重力波は自由質点間の距離を四重極で変化させる性質を持つため、干渉計に重力波が入射すると光路差が波長の整数倍からずれる。これにより dark port で干渉縞が生じ、重力波を検出することができる。

Advanced LIGO や Advanced Virgo, KAGRA など、世界中の重力波検出器がレーザー干渉型重力波検出器である。相互作用の小さい重力波の信号を捉えるために、レーザー干渉計の基線長は 10^2km 程度の長さが要求される。しかし、地球上で 100km 程度の干渉計を建設することはほぼ不可能であり、実際に Advanced LIGO の基線長は 4km , KAGRA は 3km , GEO は 1.2km である。光の実効的な距離を稼ぐ手段として、後述の Fabry-Perot 共振器が導入されている。

¹²BBH に比べて中性子星連星の質量は軽いため、その固有振動は高周波数帯となる。

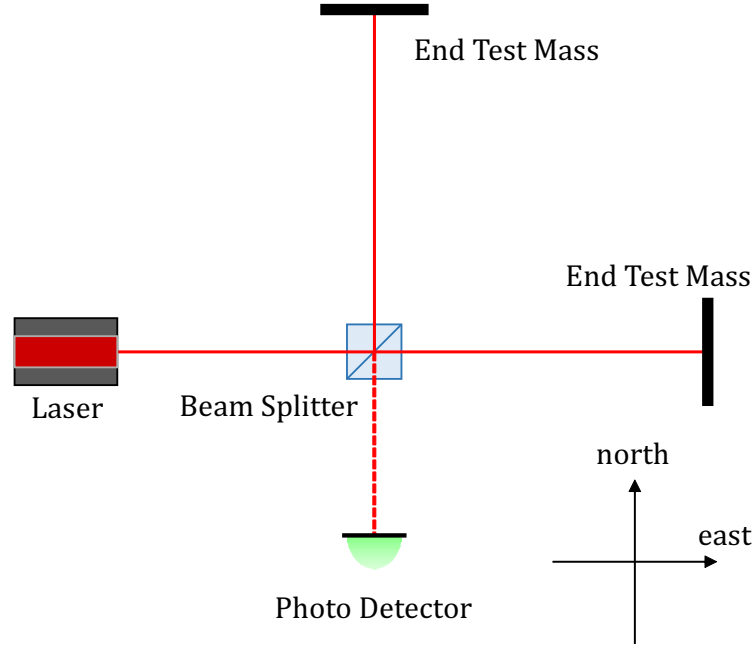


Figure 1.2: Michelson 干渉計. Beam Splitter では north 方向の反射率が正, east 方向の反射率が負であるため, dark port 側で光が打ち消し合う.

1.3.2 Michelson 干渉計の基本原理解

Michelson 干渉計の基本的な設計は, 図 1.2 の通りである. east 方向と north 方向の光路差を波長の整数倍に設定しておけば, ETM から反射された 2 つの光のうち, east 方向の光の位相が反転し, 光検出器側へ漏れ出る量はゼロとなる. これが, 光検出器側が dark port, あるいは anti-symmetric port と呼ばれる由縁である. 逆に, ETM に反射された光がレーザー側へ戻る際には位相の反転が生じない. したがって, レーザー側へ戻る光は強め合うことになり, これが bright port, あるいは symmetric port と呼ばれる由縁である.

Michelson 干渉計に重力波が入射した場合を考える. 重力波は自由質点間の距離に四重極の影響を与えるため, 例えば east 方向が伸びた際には north 方向は縮められる. これにより east arm と north arm の光路差が波長の整数倍からずれてしまい, dark port 側に光が漏れ出る. dark port における光の漏れは重力波が入射したことにより引き起こされるため¹³, この光は重力波の情報を持つことが期待される. 時間領域における重力波の歪みを $h(t)$ とし, ETM と Beam Splitter の距離を L とすれば, 重力波が入射したことによる光路差の変位は $\delta L = 2h(t)L$ となる. 同様に, 伝播する電場の位相変位は $\Delta\phi(t) = 2h(t)L\omega_0/c$ と書ける. ここで, ω_0 , c は, それぞれレーザーの角周波数と光の速さを表す. 典型的な重力波の振幅は 1m あたり $h \sim 10^{-21}$ であり, 干渉計に用いられるレーザーの周波数は $\omega_0 \sim 9 \times 10^{14}$ Hz である. KAGRA の arm の長さ 3km を用いれば, 典型的な重力波の入射による位相変位は $\Delta\phi \sim 10^{-11}$ と計算できる. このように重力波検出器で生じる位相変位は非常に小さく, 計測することが難しい.

この問題を解消するために, Advanced LIGO や KAGRA では Fabry-Perot 方式が

¹³厳密には, 2.2 節で導入する輻射圧揺らぎなどの影響で鏡は揺れている.

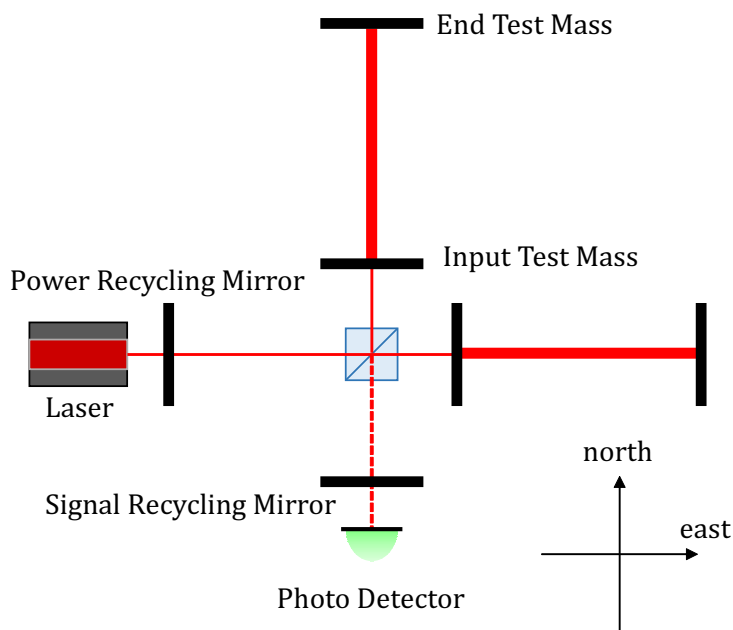


Figure 1.3: Power Recycling Mirror, Signal Recycling Mirror, Fabry-Perot Cavity を含んだ Michelson 干渉計.

導入されている (図 1.3). これは, Input Test Mass (ITM) を Beam Splitter と ETM の間に設置することで腕共振器を構成し, 光の実効的な距離を稼ぐという方法である. 共振器内で入射レーザー光は共振状態であり, ITM と ETM の 2 枚鏡で構成されるこの腕共振器を Fabry Perot Cavity (FPC) と呼ぶ. Fabry-Perot Cavity において, ITM を透過した光は ETM で反射され, 再度 ITM で反射され, という事象を繰り返す, 結果として何度も Fabry-Perot Cavity 内を往復する. N 回 Fabry-Perot Cavity 内を往復するとすれば, その過程において位相変位は $\Delta\phi \sim 2hNL\omega_0/c$ となり, 重力波信号が増幅されることと同値である. さらに, Fabry-Perot Cavity の構成によって Cavity 内のレーザーパワーが実効的に上昇する¹⁴ ことになり, 後述の shot noise を大幅に改善することが可能となる.

実際の干渉計では, ITM を挿入して Fabry-Perot Cavity を構成する他に, Power Recycling Mirror (PRM) と Signal Recycling Mirror (SRM) が設置されている (図 1.3). Power Recycling Mirror はレーザーと Beam Splitter の間に置かれ, Power Recycling Cavity を構成する. Michelson 干渉計から戻ってきた光を再び干渉計へ打ち返し, 干渉計内部の実効的なレーザーパワーを向上させる役割を持つ. Signal Recycling Mirror は Beam Splitter と光検出器の間に設置され, dark port に漏れ出た信号を干渉計へ打ち返す Signal Recycling Cavity (SRC) を構成する. Power Recycling Cavity は入射レーザーが共振するように共振器長を設定するが, Singnal Recycling Cavity の共振器長は観測したい重力波の周波数に応じて変化させる. 入射レーザーが共振状態になるように設定した場合には低周波の, 入射レーザーが反共振の状態になるように設定した場合には高周波の重力波信号を取得することが期待される. 前者の Singnal Recycling Cavity

¹⁴ITM の強度透過率を T とすれば $4/T$ 程度腕内パワーが向上する.

の状態は Broadband Signal Recycling (BSR) と呼ばれ、後者は Broadband Resonant Sideband Extraction (BRSE) と呼ばれる。ここで、完全な共振・反共振状態ではなく、共振器長を少しずらして設定することを Detune するという。詳細は次章で述べるが、Detune された干渉計ではより効率よく信号を取り出すことが可能となり、これは Advanced Virgo や KAGRA, GEO などの重力波検出器でも導入されている¹⁵。上記の Fabry-Perot Cavity, Power Recycling Cavity, Signal Recycling Cavity を含んだ Michelson 干渉計のことを Dual Recycling Fabry-Perot Michelson 干渉計と呼ぶ。本修士論文で扱う干渉計は Signal Recycling Mirror のみを含む SR Michelson 干渉計である。

1.4 重力波検出器における雑音

重力波検出器では 10^{-21}m 程度の振幅を持つ重力波信号を計測しなければならない。しかし、鏡の熱雑音やレーザーの量子揺らぎによる雑音など、本来であれば無視することができる小さな雑音によって重力波信号は隠されてしまう。すなわち、雑音によって干渉計の感度は制限されることとなる。本節では、重力波検出器で問題視される雑音について代表的なものを記述する。

1.4.1 位相雑音

shot noise

古典電磁気学により、電磁場は無限個の振動子集団であることが示されている。この振動子集団の基底状態は、電磁場の零点振動に対応する。これらの零点振動は信号に影響を及ぼし、雑音となる。量子力学における不確定性原理と同様にして、電磁場の量子状態では光子数揺らぎと位相揺らぎの不確定性原理が成り立つことが知られている：

$$\Delta N_p \Delta \phi \geq 1. \quad (1.42)$$

ここで、 ΔA はパラメータ A の揺らぎ(分散)を表し、 N_p, ϕ はそれぞれ入射レーザーの光子数と位相を表す。光子数が Poisson 分布に従うコヒーレント光においては $\Delta N_p \sim \sqrt{N_p}$ であり、最小不確定状態においては $\Delta \phi \sim 1/\sqrt{N_p}$ である。この位相揺らぎが shot noise に寄与するため、noise を抑えるためには N_p の値を大きくする必要がある。これは、レーザー光の入射パワーを大きくすることに一致する。すなわち、入射パワーを大きくすれば shot noise を抑えることができるというわけである。この考え方は、干渉計への入射パワーが I_0 で与えられた際の shot noise spectrum がおよそ

$$S_{xx}^{\text{sh}} \sim \frac{\hbar c^2}{I_0 w_0} \quad (1.43)$$

で表されることから読み取ることができる。ここで、添字の xx は noise spectrum が変位の spectrum であることを示している。

¹⁵Advanced LIGO は Broadband である。

残留ガス雑音

Advanced LIGO や KAGRA などの重力波検出器では、空気中の分子による光の散乱を防ぐため各コンポーネントが真空でなければならない。しかし、高真空に引いたとしても干渉計内部にはガスが残留しており、レーザー光を散乱して位相方向の雑音を生み出す。しかし、 10^{-9} torr 程度の H_2 残留ガスに対して、雑音のスペクトル強度はおよそ $10^{-25}/\sqrt{\text{Hz}}$ 程度であるため、現在の干渉計で到達できる最高感度にはさほど影響を及ぼさないと考えられている。

1.4.2 変位雑音

輻射圧雑音

shot noise の小節でも触れたように、コヒーレント光における光子数揺らぎは $\Delta N_p \sim \sqrt{N_p}$ で与えられる。この光子数揺らぎは、干渉計の輻射圧¹⁶に強い影響を及ぼす。鏡に作用する輻射圧の揺らぎを ΔF_{rp} とすれば、作用時間 t における式は

$$\Delta F_{\text{rp}} \sim \frac{\sqrt{N_p} \hbar k_p}{t} \quad (1.44)$$

と表される。ここで、 k_p は入射レーザーの波数を表す。鏡の周波数応答関数は $-1/m\Omega^2$ で表わされるので、輻射圧雑音による変位 noise spectrum は次のように概算できる：

$$S_{xx}^{\text{rp}} \sim \frac{(\Delta F_{\text{rp}} t)^2}{m^2 \Omega^2} . \quad (1.45)$$

鏡に作用する輻射圧が小さいほど輻射圧雑音は小さくなるため、レーザーの入射パワーが小さければ小さいほど良い。これは shot noise とは逆の要求である。

このように、レーザーの量子数揺らぎという同じ発端でありながら、shot noise と輻射圧雑音は異なる入射パワー依存性を示す。同時に、shot noise は高周波帯で、輻射圧雑音は低周波帯で支配的になるという性質も持っている。このような shot noise と輻射圧雑音の関係性は、Standard Quantum Limit (SQL) と呼ばれる量子雑音の Limit を与える。式 (1.43) と (1.45) を足し合わせ、全体の量子雑音を求めると、

$$\begin{aligned} S_{xx} &= S_{xx}^{\text{sh}} + S_{xx}^{\text{rp}} \\ &\sim \frac{\hbar c^2}{I_0 w_0} + \frac{(\Delta F_{\text{rp}} t)^2}{m^2 \Omega^2} \geq \frac{2\hbar}{m\Omega^2} . \end{aligned} \quad (1.46)$$

最右辺は量子雑音の最小値を表し、標準量子限界 (Standard Quantum Limit) と呼ばれる。SQL は不確定性原理に由来するものであり、直感的には次のように理解することができる：重力波信号の位相 quadrature をより正確に計測しようとするならば、レーザーの入射パワーを上げる必要がある。これにより輻射圧雑音は増幅し、振幅 quadrature の不確定性が増加する。振幅 quadrature をより正確に計測しようとするならば、レーザーの入射パワーを下げる必要があるが、これにより shot noise が増幅し、位相 quadrature の不確定性が増加する。この trade-off の関係が SQL を生み出すのである。

¹⁶干渉計においてレーザーが鏡に及ぼす力である。

地面振動雑音

地面振動雑音は、 10^0Hz 以下程度の比較的低周波な領域で支配的となる雑音である。1Hz 近辺での地面振動雑音の大きさはおよそ $10^{-8}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ 程度であり、 Ω^{-2} に比例しながら減少する。この地面振動雑音を回避するために、重力波検出器では Vibration Isolation System (VIS) を設計・導入している。VIS は ITM や ETM などの鏡を振り子で釣ることで地面振動の直接的な影響を緩和するシステムであり、Advanced LIGO や KAGRA でも非常に大きな役割を担っている。

熱雑音

熱雑音は、重力波検出器を構成する鏡や振り子で生じる雑音である。鏡における熱雑音は、Thermo-optic noise と Brownian thermal noise が有名である [4]。Thermo-optic noise は鏡のコーティングの温度変化により引き起こされる雑音であり、熱膨張が原因となる Thermoelastic noise と、熱による屈折率の変化が原因となる Thermorefractive noise の 2 種類がある。Brownian thermal noise は鏡のブラウン運動の揺らぎによってもたらされる雑音であり¹⁷、ブラウン運動による鏡の体積変動を通じて影響を見ることができる。Brownian thermal noise の Power Spectral density (PSD) は温度 T の $1/2$ 乗に比例するため、当然ながら低温では減少することがわかる。

1.4.3 雑音と本研究背景

前節の雑音を加味して計算した重力波検出器の感度は図 1.4 のようになる。図 1.4 の周波数帯における振る舞いに注目すると、低周波数帯では地面雑音、100Hz 帯では熱雑音と量子雑音、高周波数帯では量子雑音に制限されていることがわかる。高周波数帯の量子雑音は shot 雑音である。周波数 Ω の値が大きい領域では、干渉計の伝播によって生じる位相遅れ $e^{i\Omega L/c}$ が負符号となり信号を打ち消し始めてしまうため、高周波数帯の量子雑音が大きくなる。低周波数帯の地面雑音を改善するためには「地下や宇宙に検出器を建設する」、100Hz 帯の熱雑音を改善するためには「低温鏡の使用やコーティングの材質の見直しをする」など、様々な研究がなされている。それに対し、高周波数帯の量子雑音を改善する効果的なアイデアは未だ実装されていない¹⁸。我々の研究室では Beam Splitter と Signal Recycling Mirror の間に非線形光学結晶を設置することで実効的な信号増幅を実現し、高周波数帯の量子雑音を改善する干渉計を考案した [8]。具体的な設計を図 1.5 に示す。Signal Recycling Michelson 干渉計では、Signal Recycling 共振器長を共振から少しずらす (detune) ことにより、Sideband が鏡と鏡を繋ぐばねのように振る舞うことが知られている。この現象を光ばねと呼ぶ。光ばねの共振周波数付近において重力波信号が増幅する性質から、光ばねの共振周波数近辺で干渉計の感度は向上すると言われている¹⁹。我々の干渉計では、結晶を用いた非線形光学効果によりこの光ばねをさらに固くする。光ばねの共振周波数を上げることによって、高周波数帯における感度を向上させることができる。100Hz 帯で支配的となる熱雑音の

¹⁷鏡の温度が非零であることに起因する。

¹⁸位相補償結晶を用いた white light cavity[15] などのアイデアは存在するが、実装は難しいとされている。

¹⁹厳密な理由については 5.1 節で述べる。

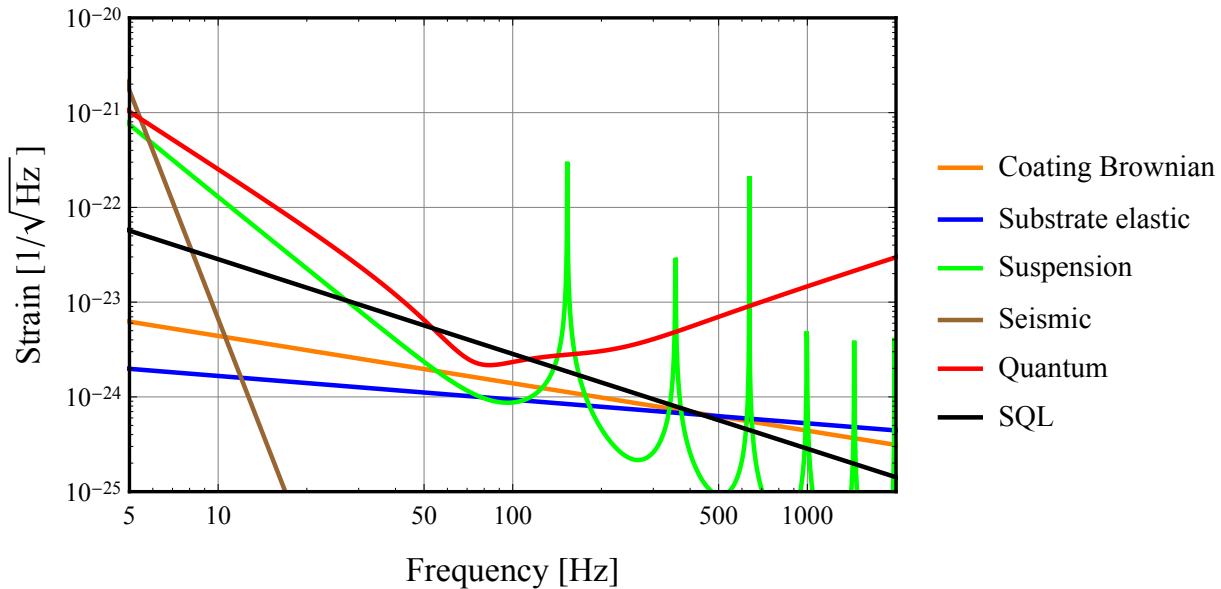


Figure 1.4: KAGRA の感度曲線. 縦軸が Amplitude Spectral Density, 横軸が振動数を表す. オレンジ線が鏡のコーティングにおける Brownian Thermal Noise, 青線は鏡の熱弾性雑音, 緑はサスペンションの熱雑音, 茶線は地面雑音, 赤線は量子雑音, 黒線は標準量子限界である. 縦軸の値が小さいほど雑音が小さいため, 感度曲線は下に行くほど感度が良い.

スペクトルは f の $-1/2$ 乗に比例しており, 高周波数帯における干渉計感度は完全に量子雑音に制限されていることから, 光ばねと非線形光学効果を利用した我々の系は高周波数帯において確かに干渉計感度を改善できている.

干渉計感度は信号雑音比 (Noise/Signal) で計算される. 量子雑音を改善するための非線形光学効果, すなわち Squeezing の利用方法としては, 干渉計の雑音を小さくする方法と信号を増幅する方法が挙げられる. KLMTV[5] などで行われている Squeezing は雑音を小さくする作用である. それに対し, 我々の系では信号を増幅させるために Squeezing の作用を用いる. この理由は, 量子雑音を小さくするために Squeezing を用いる従来の方法では, 鏡における光の散乱や吸収などの光学損失によって干渉計感度が悪化しやすく, 光学損失に弱いという特性を持つ. 逆に, 信号増幅として Squeezing を用いる我々の手法はこれらの光学損失に強いとされている. 以上をまとめると, 高周波数帯においてよい感度を持つ, 光学損失に強いという2つの優位性を持つと予測されていた. しかし, 高周波数帯において感度が向上することは先行研究 [8] によって解析的に示されているが, その光学損失の振る舞いについては解析的に計算されていなかった. 本修士論文では, 信号増幅型重力波検出器における光学損失の振る舞いを解析的に計算し, 雑音減衰型の重力波検出器における光学損失の影響と比較することを目的としている.

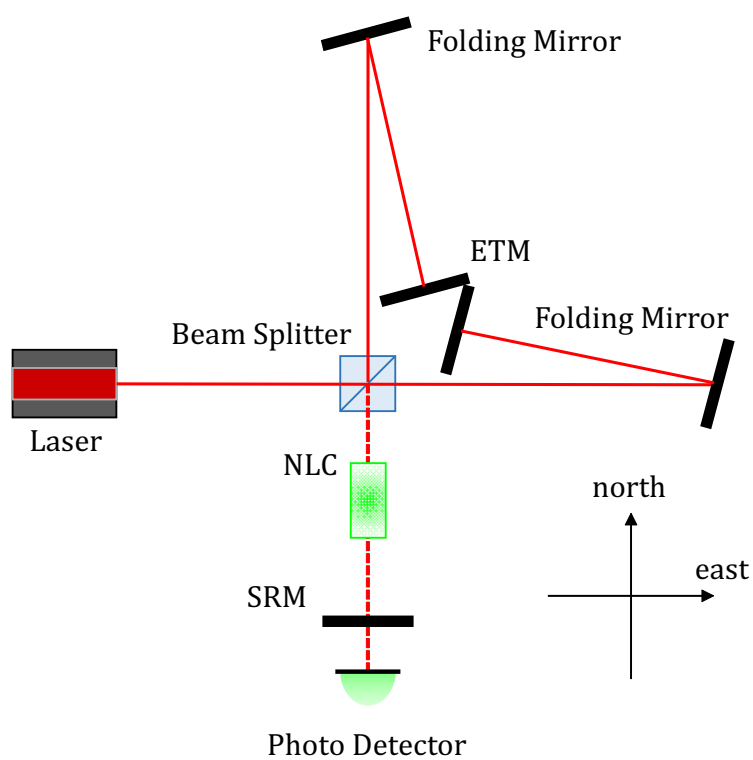


Figure 1.5: 非線形光学結晶設置型重力波検出器.

Chapter 2

重力波検出器の量子雑音

前章で記述した通り，高周波数帯の感度を制限する要因は量子雑音である．本章では，干渉計における量子雑音を数学的に記述する．まず，古典的なレーザーのゆらぎを量子化することで，two photon formalism の記述法を取り入れる．Two photon formalism を用いて干渉計の入出力関係 (Input-output relation) を求め，干渉計の感度を計算する．次に，重力波検出器の感度向上に用いられる Signal recycling cavity の振る舞いを，two photon formalism を用いた伝達関数法で求める．電磁場の振る舞いを知るための計算方法は伝達関数行列法と Hamiltonian 法 [6] があるが，Hamiltonian 法は近似を含んでおり，detune が大きすぎる系では振る舞いが変わってしまう性質を持つため，ここでは伝達関数行列法を選択する．

2.1 電磁場の量子化

2.1.1 第二量子化

量子化された電磁場は基底状態でも揺らいでいる．これは電磁場が無数個の調和振動子の集合に分解できること（古典電磁気学），角振動数 ω の調和振動子の基底状態におけるエネルギーが $\hbar\omega/2$ で記述されること（量子力学）から理解できる．この物理的な性質は，数学的に次のように計算することができる [9]．

真空中の量子化された電磁場において，電磁場のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(t, x)$ は次のように展開される：

$$\mathbf{A}(t, x) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} . \quad (2.1)$$

ここで， $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ は展開係数であり，ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(t, x)$ は実数である．すなわち

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = (\mathbf{A}_{-\mathbf{k}})^* \quad (2.2)$$

が成り立つ．これは，空間と波数の Fourier 変換の定義を

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx A(x) e^{ikx}$$

とし¹, $A(x) \in \mathbb{R}$ を考慮して複素共役を計算すると

$$[A(-k)]^* = \int_{-\infty}^{\infty} dx A(x) e^{ikx} = A(k)$$

となることから確認できる. 式 (2.1) をベクトルポテンシャルの波動方程式 $\nabla^2 \mathbf{A}(t, x) - \ddot{\mathbf{A}}(t, x)/c^2 = 0$ に代入すると, 展開係数 $\mathbf{A}_k$ についての関係式

$$\ddot{\mathbf{A}}_k(t) + \omega_k^2 \mathbf{A}_k(t) = 0 \quad (2.3)$$

が得られる². ここで $\omega_k = c|\mathbf{k}| \equiv ck$ とした. 次に, この電磁場が持つエネルギーを計算する. 電場 $\mathbf{E}$ と磁界 $\mathbf{H}$ を持つ電磁場のエネルギー密度 W は

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$$

で表されることから [9], 電磁場が持つ全体のエネルギーは

$$\mathcal{E} = \frac{1}{8\pi} \int dV (E^2 + H^2) = \frac{V}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot (\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}})^* + (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \cdot \{\mathbf{k} \times (\mathbf{A}_{\mathbf{k}})^*\} \right] \quad (2.4)$$

となる. ベクトル解析の公式

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

を用いて, 式 (2.4) の括弧内第二項を計算すると

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \times \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \cdot \{\mathbf{k} \times (\mathbf{A}_{\mathbf{k}})^*\} &= k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} (\mathbf{A}_{\mathbf{k}})^* - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}) \{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{A}_{\mathbf{k}})^*\} \\ &= k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} (\mathbf{A}_{\mathbf{k}})^* . \end{aligned}$$

ここで, 波数ベクトル $\mathbf{k}$ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ は直交することを用いている. 上式の結果と式 (2.2) を (2.4) に代入すれば

$$\mathcal{E} = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}} \left[\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{-\mathbf{k}} + \omega_k^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{A}_{-\mathbf{k}} \right] \quad (2.5)$$

が得られる. 式 (2.3) から予測できることだが, (2.5) の式の形は, 量子力学で扱われる調和振動子のハミルトニアン³の式の形に非常によく似ている. 具体的には, 和にかかる係数 $V/8\pi c^2$ を無視すれば, $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ を一般化座標, $\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}$ を一般化運動量と見なすことができる. これをモチベーションとして, 式 (2.5) における一般化座標 $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ と一般化運動量 $\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}$ を, 生成消滅演算子に対応した関数 $a_{\mathbf{k}}^*$, $a_{\mathbf{k}}$ に書き換える:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega_k}} (a_{\mathbf{k}} + a_{-\mathbf{k}}^*) , \quad (2.6)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}} = -ick \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega_k}} (a_{\mathbf{k}} - a_{-\mathbf{k}}^*) . \quad (2.7)$$

¹Fourier 変換の位相部分の符号の取り方に注意する.

²調和振動子の運動方程式を Fourier 変換した結果と同等である.

$a_{\mathbf{k}}^*$, $a_{\mathbf{k}}$ を用いれば, ベクトルポテンシャル (2.1) は

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi c^2}{\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}) \quad (2.8)$$

と書き換えることができ, このときのエネルギーは

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^* + a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}) \quad (2.9)$$

となる. さらに, 古典電磁気学ではただの関数であるベクトルポテンシャルとその展開係数 $a_{\mathbf{k}}^*$, $a_{\mathbf{k}}$ は, 量子化の際に演算子に置き換えなければならない. これらを正準量子化するための条件より,

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \hbar \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (2.10)$$

が導かれる. ここで, $[\hat{A}, \hat{B}]$ は演算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ の交換関係を表す. 式 (2.10) を用いて (2.9) を書き換えれば

$$\hat{\mathcal{E}} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.11)$$

が得られる. ここで, 量子力学における調和振動子のハミルトニアンと同様の式にするために生成消滅演算子をさらに $\hbar$ で規格化した.

レーザー光を用いた実験において, 観測可能な物理量はその電磁場である. z 方向への進行波では, その進行方向に直交するように, すなわち $x-y$ 平面と平行に電場と磁場は存在している. 位置 z における電場 $\hat{E}_x(z, t)$ と磁界 $\hat{H}_y(z, t)$ を式 (2.8) より求めると

$$\begin{aligned} \hat{E}_x(z, t) &= i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{2\pi \hbar \omega_{\mathbf{k}}} (\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{ikz} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) e^{-ikz}), \\ \hat{H}_y(z, t) &= -i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{\omega_{\mathbf{k}}}} k (\hat{a}_{\mathbf{k}}(t) e^{ikz} - \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger(t) e^{-ikz}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

生成消滅演算子 $\hat{a}_{\mathbf{k}}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ の交換関係を用いれば,

$$\begin{aligned} [\hat{E}_x(z, t), \hat{E}_x(z', t)] &= 0, \\ [\hat{H}_y(z, t), \hat{H}_y(z', t)] &= 0, \\ [\hat{E}_x(z, t), \hat{H}_y(z', t)] &= -i\hbar c^2 \frac{\partial \delta(z - z')}{\partial z}, \\ [\hat{E}_x(z, t), \hat{E}_x(z, t')] &= i\hbar \frac{\partial \delta(t - t')}{\partial t} \end{aligned}$$

のような交換関係が得られる.

2.1.2 共振器における場の量子化

干渉計の共振器内部における光学モードはエルミート・ガウシアンモードで記述される。したがって、干渉計の共振器内部における電磁場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = i \sum_j \sqrt{2\pi\hbar\omega_j} u_j(\mathbf{x}) [\hat{a}_j e^{-i(\omega_j t - k_j x)} - \hat{a}_j^\dagger e^{i(\omega_j t - k_j x)}] \quad (2.13)$$

と表される。ここで、 $u(\mathbf{x})$ は共振器内部における電磁場の断面積の逆数に対応している。式(2.13)において、共振器の外場、すなわちキャリア光は $j = 0$ の基本モードを励起している。すなわち、 ω_0 はキャリア光の周波数を、 k_0 はキャリア光の波数ベクトルの大きさを表す。慣習に従って $\hat{a}_0 = -iA_0/\sqrt{2}$ と置くと、共振器内部に主に存在する電場³は

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} u_0(\mathbf{x}) \bar{A}_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) \quad (2.14)$$

と書かれる。特に、共振器方向を z 軸として、基本モードの z 方向の電場を考えると

$$E_0(z, t) = \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} u_0(\mathbf{x}) \bar{A}_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) \equiv E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z). \quad (2.15)$$

ここで、振幅成分をまとめて E_0 と置いた。以上が共振器内部における基本モードの式である。重力波検出器をはじめとするレーザーを用いた高精度な実験では、この基本モードであるキャリア光のゆらぎ成分まで考える必要がある：

$$E(z, t) = (E_0 + \delta A) \cos(\omega_0 t - k_0 z + \delta\phi). \quad (2.16)$$

δA , $\delta\phi$ はそれぞれ波の振幅、位相のゆらぎを表している。このゆらぎは、量子的な雑音として高精度の実験を阻害する要因となる。 $\delta A \sim \epsilon \sim \delta\phi$ として、式(2.16)におけるゆらぎの一次までをとると

$$E(z, t) \simeq E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) + \delta A \cos(\omega_0 t - k_0 z) - E_0 \delta\phi \sin(\omega_0 t - k_0 z) + O(\epsilon^2). \quad (2.17)$$

一方で、第二量子化で導入した演算子を用いて記述すると

$$\hat{E}(z, t) = \hat{I} E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) + i u_0(\mathbf{x}) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{2\pi\hbar\omega} [\hat{a}_\omega e^{-i(\omega t - k z)} - \hat{a}_\omega^\dagger e^{i(\omega t - k z)}]. \quad (2.18)$$

$\hat{I}$ は単位演算子である。ここで、 $\omega = \omega_0 + \Omega$, $k \rightarrow k_0 + k$ とし、狭帯域近似 ($\Omega \ll \omega_0$) を用いれば⁴

$$\hat{E}(z, t) \simeq \hat{I} E_0 \cos(\omega_0 t - k_0 z) + \delta \hat{E}(z, t) \quad (2.19)$$

のように、主成分とそのゆらぎに分解できる。ここでゆらぎ $\delta \hat{E}(z, t)$ を

$$\begin{aligned} \delta \hat{E}(z, t) = & u_0(\mathbf{x}) \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} [i \hat{a}_\Omega e^{-i(\Omega t - k z)} - i \hat{a}_\Omega^\dagger e^{i(\Omega t - k z)}] \cos(\omega_0 t - k_0 z) \\ & + u_0(\mathbf{x}) \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega}{2\pi} [\hat{a}_\Omega e^{-i(\Omega t - k z)} + \hat{a}_\Omega^\dagger e^{i(\Omega t - k z)}] \sin(\omega_0 t - k_0 z) \end{aligned} \quad (2.20)$$

³キャリア光は古典的に扱うことができる。

⁴共振器内部における主成分はキャリア光であり、ゆらぎはキャリア光の持つ周波数 ω_0 の周辺に主に存在していると考えられる。

とまとめている．式 (2.17) と (2.20) を比較すれば，振幅ゆらぎ，位相ゆらぎを第二量子化した表式として

$$\delta\hat{A} = \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} [i\hat{a}_\Omega e^{-i(\Omega t - kz)} - i\hat{a}_\Omega^\dagger e^{i(\Omega t - kz)}], \quad (2.21)$$

$$\delta\hat{\phi} = \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} [\hat{a}_\Omega e^{-i(\Omega t - kz)} + \hat{a}_\Omega^\dagger e^{i(\Omega t - kz)}]. \quad (2.22)$$

が得られる⁵．慣習に従い， i と e^{ikz} を $\hat{a}_\Omega$ 内に取り込み，周波数 Ω を正とする．さらに，振幅ゆらぎ演算子 $\hat{a}_1$ と位相ゆらぎ演算子 $\hat{a}_2$ を

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{a}_\Omega + \hat{a}_{-\Omega}^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}_2 = \frac{\hat{a}_\Omega - \hat{a}_{-\Omega}^\dagger}{\sqrt{2}i} \quad (2.23)$$

のように定義すれば，式 (2.21)(2.22) は

$$\delta\hat{A} = \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} (\hat{a}_1 e^{-i\Omega t} + \hat{a}_1^\dagger e^{i\Omega t}), \quad (2.24)$$

$$\delta\hat{\phi} = \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} (\hat{a}_2 e^{-i\Omega t} + \hat{a}_2^\dagger e^{i\Omega t}). \quad (2.25)$$

のように書き換えられる．振幅ゆらぎ演算子，位相ゆらぎ演算子で場を記述する計算手法を two photon formalism と呼び，これらの演算子の期待値はその電場における振幅ゆらぎ，位相ゆらぎの大きさに対応している． $\hat{a}_1$ ， $\hat{a}_2$ の交換関係は

$$[\hat{a}_1, \hat{a}_{2'}^\dagger] = 2\pi i \delta(\Omega - \Omega') = -[\hat{a}_2, \hat{a}_{1'}^\dagger] \quad (2.26)$$

が非ゼロ成分であり，その他の交換関係はゼロとなる．また，添字の' は周波数 Ω' における演算子を表している．

一般に，真空場を含めた電磁場は振幅ゆらぎと位相ゆらぎを持っており，そのゆらぎの大きさは上記の振幅ゆらぎ演算子と位相ゆらぎ演算子を用いて計算することができる．以下の節ではこれらのゆらぎ演算子を用いて量子雑音の計算を行う．

2.2 Michelson 干渉計とその感度

干渉計における量子雑音は，Michelson 干渉計の dark port から入射した真空場 $\mathbf{a}$ と出射される真空場 $\mathbf{b}$ の入出力関係式 (Input-output relation) から計算することができる [5]．ここで，

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

であり，各真空場のベクトルは振幅ゆらぎ演算子と位相ゆらぎ演算子を成分に持っている．今後は簡単のため，これらの演算子から $\hat{\mathbf{a}}$ を取り計算を進める．また，以下では Michelson 干渉計の腕を折り返した形を考える (図 2.1)．これは本修士論文の焦点であ

⁵位相揺らぎについては次元を合わせるため規格化している．

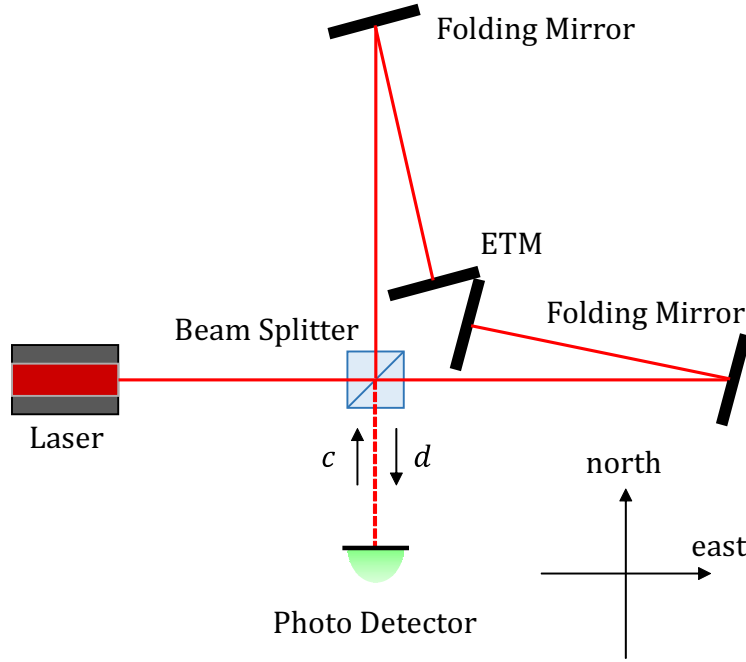


Figure 2.1: 折り返し鏡のある Michelson 干渉計全体の場合の定義. 各々のベクトルは振幅ゆらぎ演算子と位相ゆらぎ演算子を成分に持つ.

る信号増幅型重力波検出器の感度曲線を計算した際に、ドイツの重力波検出器 GEO のアップグレードを想定していたことが理由である. なお、本修士論文の焦点である光学損失を含めた (Lossy) 干渉計感度は第 4 章で扱うため、それまでは断りのない限り光学損失の無い系 (Lossless) で計算を進める.

2.2.1 Beam Splitter 近傍の場合

図 2.2 のように Beam Splitter 近傍の場合を定義する. D は入射レーザーの古典振幅を表し、その他の場合は式 (2.27) と同様に振幅・位相ゆらぎを成分に持つ量子的な真空場である. 前節の計算結果より、レーザー側から入射する電場は

$$E_{\text{in}}(t) = u_0 \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} \left\{ \cos \omega_0 t \left[\sqrt{2}D + \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} (u_1 e^{-i\Omega t} + u_1^\dagger e^{+i\Omega t}) \right] + \sin \omega_0 t \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} (u_2 e^{-i\Omega t} + u_2^\dagger e^{+i\Omega t}) \right\} \quad (2.28)$$

と書ける⁶. 式 (2.28) より、 D と u_1 は $\cos \omega_0 t$ 方向で光場の振幅の情報を、 u_2 は $\sin \omega_0 t$ 方向で光場の位相の情報を持っていることが確認できる.

Beam Splitter は振幅透過率、振幅反射率が $1/\sqrt{2}$ の鏡であることから⁷, 図 2.2 に

⁶ここで、前節の結果を適切に規格化している.

⁷強度透過率、反射率はこの 2 乗であるため、50%透過、50%反射の鏡であることと同義である.

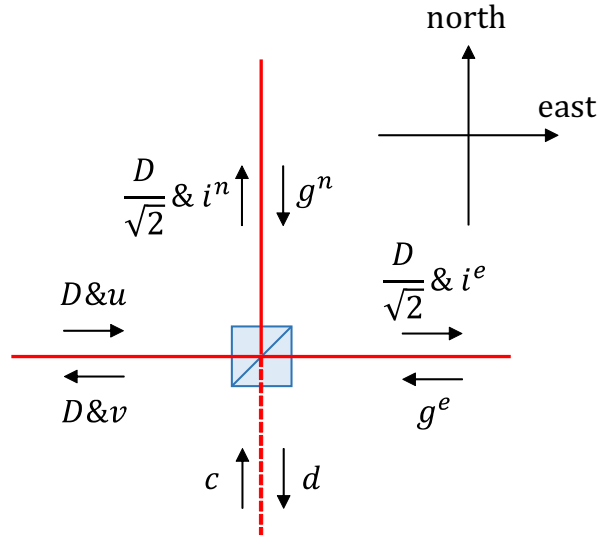


Figure 2.2: Beam Splitter 近傍における場の定義. ここで, Beam Splitter 透過後の古典振幅 D は $1/\sqrt{2}$ 倍されることに注意する.

における真空場の接続条件は

$$\begin{aligned} i^n &= \frac{u + c}{\sqrt{2}}, & i^e &= \frac{u - c}{\sqrt{2}}, \\ d &= \frac{g^n - g^e}{\sqrt{2}}, & v &= \frac{g^n + g^e}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.29)$$

のような連立方程式となる. ここで, 鏡の反射面はコーティングの存在する面が自由端, 存在しない面が固定端であり, レーザー入射側を自由端としている (図 2.2).

2.2.2 Sideband

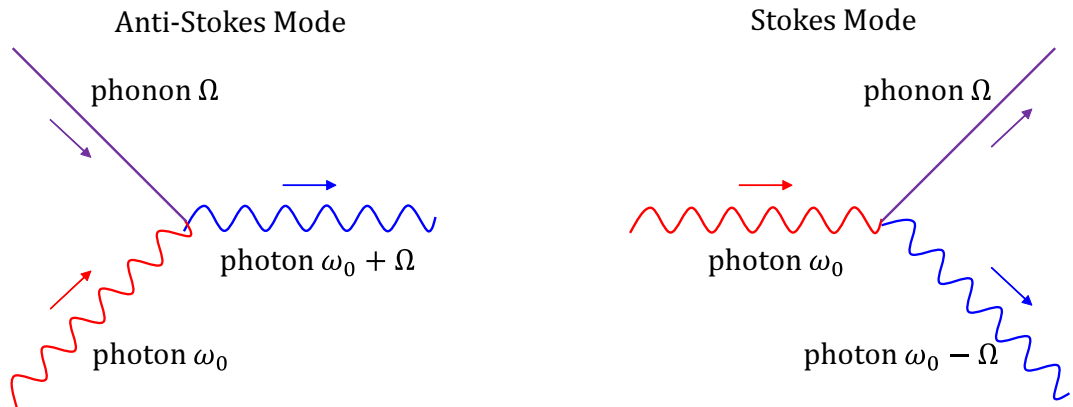


Figure 2.3: Sideband の生成. ω_0 , Ω はそれぞれキャリアと鏡の周波数を表す.

重力波が干渉計に入射すると、第1章で議論したような四重極の歪みが生じ、north 方向と east 方向の長さが変化する。しかし、重力波が干渉計に入射していない場合でも、Arm に存在するレーザーの輻射圧ゆらぎが原因で2枚の鏡は揺れている。

Folding mirror の存在しない単純な Michelson 干渉計において、重力波や輻射圧ゆらぎにより鏡の位置がゆらいだ場合の応答を考える。位置のゆらぎを $x(t)$ で記述し、この Fourier 変換を $X(\Omega)$ とする。Fourier 変換の定義は

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} X(\Omega) e^{-i\Omega t} \quad (2.30)$$

である。鏡のゆらぎ $X(\Omega)$ は、Arm に存在するキャリア光 ω_0 の側帯波 (Sideband) $\omega_0 \pm \Omega$ を生み出す。この現象は周波数 Ω のフォノンと周波数 ω_0 のフォトンの相互作用であり、upper sideband を生じるモードを Anti-Stokes モード、lower sideband を生じるモードを Stokes モードと呼ぶ (図 2.3)。計算式上では、次式のようにキャリア光の分裂と見することもできる：

$$\begin{aligned} E_{\text{carrier}}(t) &= u_0 \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} \frac{\sqrt{2}D}{\sqrt{2}} \cos \left(\omega_0 \left[t - \frac{2x(t)}{c} \right] \right) \\ &\simeq u_0 \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} D \left(\cos \omega_0 t + \frac{2\omega_0}{c} x(t) \sin \omega_0 t \right) \\ &= u_0 \sqrt{2\pi\hbar\omega_0} D \left\{ \cos \omega_0 t + \left(\frac{2\omega_0}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} X(\Omega) e^{-i\Omega t} \right) \sin \omega_0 t \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

ここで、振動 $x(t)$ は非常に小さいとして計算をしている。式 (2.31) より、鏡の振動 $X(\Omega)$ が存在した際、もともと $\cos \omega_0 t$ 方向、すなわち振幅方向を向いていたキャリア光の他に、位相方向である $\sin \omega_0 t$ 方向を向いた成分が生じていることがわかる。これが周波数 ω_0 のキャリア光の Sideband である。式 (2.31) より、Sideband 場 $\delta \mathbf{g}$ の表式として

$$\delta g_1 = 0, \quad \delta g_2 = \frac{2\omega_0 D}{c} X(\Omega) \quad (2.32)$$

が得られる。次小節では、この Sideband 場を含めた Michelson 干渉計の Arm 部分の計算を行う。

2.2.3 Michelson 干渉計の Arm 部分

east 方向と north 方向の腕はそれぞれ、折り返し鏡 (Folding mirror) とエンド鏡 (End Test mass:ETM) の2枚で構成される。これらは Lossless の計算上で振幅反射率が1、透過率0である完全反射鏡として扱われる。east arm における真空場を図 2.4 のように定義し、 $i-g$ の Input-output relation を計算する。ここで、 $\delta \mathbf{g}_{\text{FM}}$, $\delta \mathbf{g}_{\text{ETM}}$ はそれぞれ Folding mirror, ETM で生成される Sideband 場を表す。

Folding mirror の位置ゆらぎを $x_1(t)$, ETM の位置ゆらぎを $x_2(t)$ とし、その Fourier 変換を $X_1(\Omega)$, $X_2(\Omega)$ とする。このとき場の連立方程式は次のようになる：

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \mathbf{i} e^{i\frac{\beta}{2}} + \delta \mathbf{g}_{\text{FM}} \\ \mathbf{k} e^{-i\frac{\beta}{2}} &= \mathbf{j} e^{i\frac{\beta}{2}} + \delta \mathbf{g}_{\text{ETM}} \\ \mathbf{g} e^{-i\frac{\beta}{2}} &= \mathbf{k} + \delta \mathbf{g}_{\text{FM}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

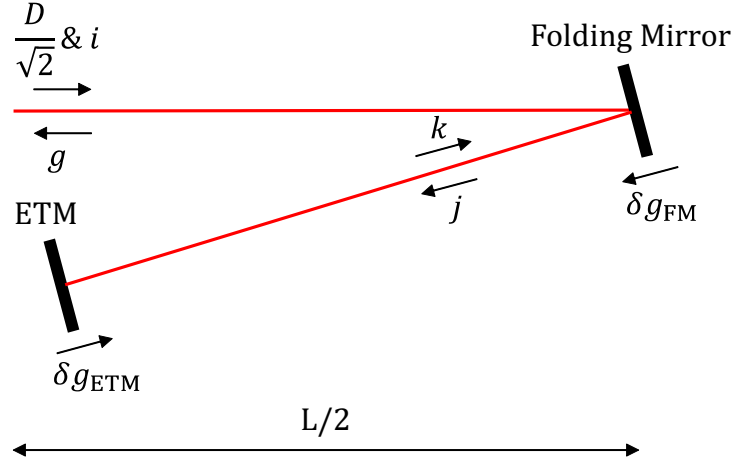


Figure 2.4: Michelson 干渉計の arm における場の定義. 簡単のため, 添字の e は外している.

ここで, L は Michelson 干渉計の基線長であり, Beam Splitter から Folding mirror までの距離は $L/2$ である. また, $\beta = \Omega L/c$ は Michelson 干渉計の腕を伝播した際に生じる位相差である⁸. 連立方程式 (2.33) を解くと

$$\mathbf{g} = i e^{2i\beta} + \delta \mathbf{g}_{\text{FM}} e^{i\frac{3\beta}{2}} + \delta \mathbf{g}_{\text{ETM}} e^{i\beta} + \delta \mathbf{g}_{\text{FM}} e^{i\frac{\beta}{2}} \quad (2.34)$$

が得られる. (2.34) より, Beam Splitter に入射する $\mathbf{g}$ は, 入射真空場 i と, Folding mirror と ETM で生じた Sideband で構成されることがわかる.

ここで, 我々が注目する kHz 帯では

$$\beta = \frac{\Omega L}{c} \sim \frac{10^3 \times 10^3}{10^8} = 10^{-2} \ll 1$$

が成り立つことから, 式 (2.34) は

$$\mathbf{g} \simeq i e^{2i\beta} + (\delta \mathbf{g}_{\text{FM}} + \delta \mathbf{g}_{\text{ETM}} + \delta \mathbf{g}_{\text{FM}}) e^{i\beta} \quad (2.35)$$

と近似できる. これに (2.32) を代入すると

$$\mathbf{g} = i e^{2i\beta} + \frac{2\omega_0 D}{c} [2X_1(\Omega) + X_2(\Omega)] e^{i\beta} \mathbf{e}_{\text{phase}} \quad (2.36)$$

が得られる. ここで, $\mathbf{e}_{\text{phase}}$ は位相方向の単位ベクトルである.

2.2.4 輻射圧ゆらぎ

(2.29)(2.36) を解けば, Beam Splitter の dark port に関する Input-output relation が得られる. これを得るためには, 各 Sideband 場に含まれている変位 $X(\Omega)$ を求める必要がある. 重力波や輻射圧ゆらぎによって生じる力が鏡の位置を変動させていることから, 単純に Folding mirror と ETM における運動方程式を解けばよい.

⁸Fabry-Perot 共振器を含む系では β の定義も異なる.

[17] より, Folding mirror と ETM における運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} = 2\delta f_{\text{rad}}(t), \quad (2.37)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} = \delta f'_{\text{rad}}(t) \quad (2.38)$$

と書くことができる⁹. ここで, m_1, m_2 は Folding mirror と ETM の鏡の質量を, δf_{rad} , $\delta f'_{\text{rad}}$ は Folding mirror と ETM が電場から受ける輻射圧ゆらぎによる力を表している. 鏡に衝突する光子が及ぼす輻射圧 f_{rad} について, 光子 1 つあたりの運動量は $\hbar k$ であることと力積の関係式から

$$f_{\text{rad}} = 2\hbar k \times N = 2\hbar k \times \frac{P}{\hbar\omega_0} = \frac{2P}{c}. \quad (2.39)$$

ここで P は腕におけるキャリア光のパワーであり, Beam Splitter に入射するレーザーパワー I_0 を用いて $P = I_0/2$ と書ける. I_0 は光子 1 つあたりのエネルギー $\hbar\omega_0$ と単位時間あたりの光子数 D^2 を用いて

$$I_0 = \hbar\omega_0 \times D^2 \quad (2.40)$$

与えられることから, 式 (2.39) に代入することで

$$f_{\text{rad}} = \frac{\hbar\omega_0 D^2}{c} \quad (2.41)$$

が得られる. 式 (2.37)(2.38) の δf_{rad} , $\delta f'_{\text{rad}}$ はこのゆらぎであることから,

$$\delta f_{\text{rad}} = \frac{\hbar\omega_0 \delta(D^2)}{c} = \frac{2\hbar\omega_0 D}{c} \delta D.$$

式 (2.28) より, D は振幅方向を向いている. これより, δD は電場のゆらぎを表す真空場の振幅成分に対応している. したがって¹⁰

$$2\delta f_{\text{rad}}(\Omega) = \frac{2\hbar\omega_0 D}{c} i_1 e^{i\frac{\beta}{2}} + \frac{2\hbar\omega_0 D}{c} i_1 e^{i\frac{3\beta}{2}} \simeq \frac{4\hbar\omega_0 D}{c} i_1 e^{i\beta}, \quad (2.42)$$

$$\delta f'_{\text{rad}}(\Omega) = \frac{2\hbar\omega_0 D}{c} j_1 = \frac{2\hbar\omega_0 D}{c} i_1 e^{i\beta}. \quad (2.43)$$

(2.42)(2.43) を代入すると, 鏡の運動方程式 (2.37)(2.38) は

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= \frac{4\hbar\omega_0 D}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} i_1 e^{i\beta} e^{-i\Omega t}, \\ m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= \frac{2\hbar\omega_0 D}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} i_1 e^{i\beta} e^{-i\Omega t} \end{aligned}$$

⁹電場は 2 回 Folding mirror に輻射圧を与えるため, δf_{rad} の係数が 2 となっている.

¹⁰ここで, $\delta f_{\text{rad}}(\Omega)$, $\delta f'_{\text{rad}}(\Omega)$ は各輻射圧の Fourier 変換である.

と書き換えられる．また，重力波による四重極の変位は Folding mirror に加わるため¹¹，

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{4\hbar\omega_0 D}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} i_1 e^{i\beta} e^{-i\Omega t} + \frac{L}{4} \eta_{ne} \frac{d^2 h(t)}{dt^2} . \quad (2.44)$$

ここで η_{ne} は east 方向で -1 ，north 方向で $+1$ をとる定数であり，重力波によって片腕が伸びた際に他方の腕が縮む四重極の作用を表す．Fourier 変換を行えば，周波数空間における鏡の運動方程式の解は

$$X_1(\Omega) = -\frac{4\hbar\omega_0 D}{m_1 c \Omega^2} i_1 e^{i\beta} + \frac{L}{4} \eta_{ne} h(\Omega) , \quad (2.45)$$

$$X_2(\Omega) = -\frac{2\hbar\omega_0 D}{m_2 c \Omega^2} i_1 e^{i\beta} . \quad (2.46)$$

2.2.5 Michelson 干渉計の Input-output relation

前小節までの結果を統合し，Michelson 干渉計の Input-output relation を求める．式 (2.45)(2.46) を (2.36) に代入すると¹²

$$\mathbf{g} = i e^{2i\beta} + \left[-\left(\frac{16\omega_0 I_0}{m_1 c^2 \Omega^2} + \frac{4\omega_0 I_0}{m_2 c^2 \Omega^2} \right) i_1 e^{i\beta} + \frac{2\omega_0 D}{c} \frac{L}{2} \eta_{ne} h \right] \mathbf{e}_{\text{phase}} e^{i\beta} . \quad (2.47)$$

現在の GEO 型の計算では $m_1 = m_2 = m$ として計算を行うため，

$$\frac{16\omega_0 I_0}{m_1 c^2 \Omega^2} + \frac{4\omega_0 I_0}{m_2 c^2 \Omega^2} = \frac{20\omega_0 I_0}{m c^2 \Omega^2}$$

とし，これを電場と鏡の Coupling Constant として置いている．しかし我々の系では，ETM が Folding mirror に比べて非常に軽い設定をしている ($m_1 \gg m_2$) ため，

$$\mathcal{K} = \frac{16\omega_0 I_0}{m_1 c^2 \Omega^2} + \frac{4\omega_0 I_0}{m_2 c^2 \Omega^2} \simeq \frac{4\omega_0 I_0}{m_2 c^2 \Omega^2} \quad (2.48)$$

として Coupling Constant を定義する¹³．上式を見れば明らかであるが，鏡が軽いほど輻射圧ゆらぎの影響を受けやすいため， $m_1 \gg m_2$ の系では ETM が輻射圧でゆらぐ変位のほうが支配的となる．簡単のため，以降特に断りのない限りは $m_2 = m$ において計算を進める．

以上より，(2.29)(2.47) を解けば， $c-d$ の Input-output relation は

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} e^{2i\beta} + \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\text{SQL}}} h e^{i\beta} \mathbf{e}_{\text{phase}} \quad (2.49)$$

となる．ただし，

$$\mathcal{K} = \frac{4\omega_0 I_0}{m c^2 \Omega^2} , \quad (2.50)$$

$$h_{\text{SQL}}^2 = \frac{4\hbar}{m \Omega^2 L^2} \quad (2.51)$$

とおいた．この雑音項の行列の直感的理解については後述する．

¹¹Beam Splitter から Folding mirror までの距離は $L/2$ であるが，慣習に従って規格化の $1/2$ を掛けているため，係数が $L/4$ となっている．

¹²ここで，信号 h の係数が $L/4$ から $L/2$ となることに注意する．

¹³この Coupling Constant の値は Folding mirror 無しの Michelson 干渉計と同じである．

2.2.6 信号雑音比

従来の重力波検出器では、光検出器を用いて出力の位相方向を向いた電場である $E_2(t)$ を検出していた。これは出力場の位相成分 d_2 に比例しているため、 $d_2 = d_2(\Omega)$ を観測量として考えることができる。式 (2.49) において、位相方向は

$$d_2 = (c_2 - \mathcal{K}c_1)e^{2i\beta} + \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\text{SQL}}} h e^{i\beta} \quad (2.52)$$

である。 h は重力波の信号だが、 c は dark port から入射する真空場、すなわち外乱であり、雑音と捉えることができる。したがって信号雑音比を表す演算子 h_n は

$$h_n(\Omega) = \frac{h_{\text{SQL}}}{\sqrt{2\mathcal{K}}} (c_2 - \mathcal{K}c_1) e^{-i\beta} \quad (2.53)$$

と定義できる。このとき、信号雑音比の片側スペクトル密度 $S_h(f)$ は次のように与えられる [13] :

$$\frac{1}{2} 2\pi\delta(\Omega - \Omega') S_h(f) = \langle \text{in} | h_n(\Omega) h_n^\dagger(\Omega') | \text{in} \rangle_{\text{sym}} . \quad (2.54)$$

ここで $f = \Omega/2\pi$ は振動数であり、 $|\text{in}\rangle$ は入射真空場の量子状態である。また、添字の "sym" は

$$\langle \text{in} | h_n(\Omega) h_n^\dagger(\Omega') | \text{in} \rangle_{\text{sym}} = \frac{1}{2} \langle \text{in} | h_n(\Omega) h_n^\dagger(\Omega') + h_n^\dagger(\Omega') h_n(\Omega) | \text{in} \rangle$$

を表す。式 (2.54) より、(2.53) の位相 $e^{-i\beta}$ はキャンセルするため、

$$h_n(\Omega) = \frac{h_{\text{SQL}}}{\sqrt{2\mathcal{K}}} (c_2 - \mathcal{K}c_1) \quad (2.55)$$

と書き換えることができる。

従来の重力波検出器では dark port からの入力 c は真空場であるため、数空間において $|\text{in}\rangle = |0\rangle$ と書くことができ、

$$\langle 0 | c_j c_k^\dagger | 0 \rangle_{\text{sym}} = \frac{1}{2} 2\pi\delta(\Omega - \Omega') \delta_{jk} \quad (2.56)$$

が成り立つ [13]。これを用いて式 (2.54) を計算すれば、Michelson 干渉計の感度として

$$S_h(f) = \frac{h_{\text{SQL}}^2}{2} \left(\frac{1}{\mathcal{K}} + \mathcal{K} \right) \quad (2.57)$$

が得られる (図 2.5)。 (2.57) より、Michelson 干渉計の Spectral density はそれ以上の感度向上を望むことができない制限値を持つことがわかる：

$$S_h(f) \geq h_{\text{SQL}}^2 = \frac{4\hbar}{m\Omega^2 L^2} . \quad (2.58)$$

これを標準量子限界 (Standard Quantum Limit: SQL) と呼び、重力波検出器のアップグレードではこの標準量子限界を超える干渉計を考案する必要がある。

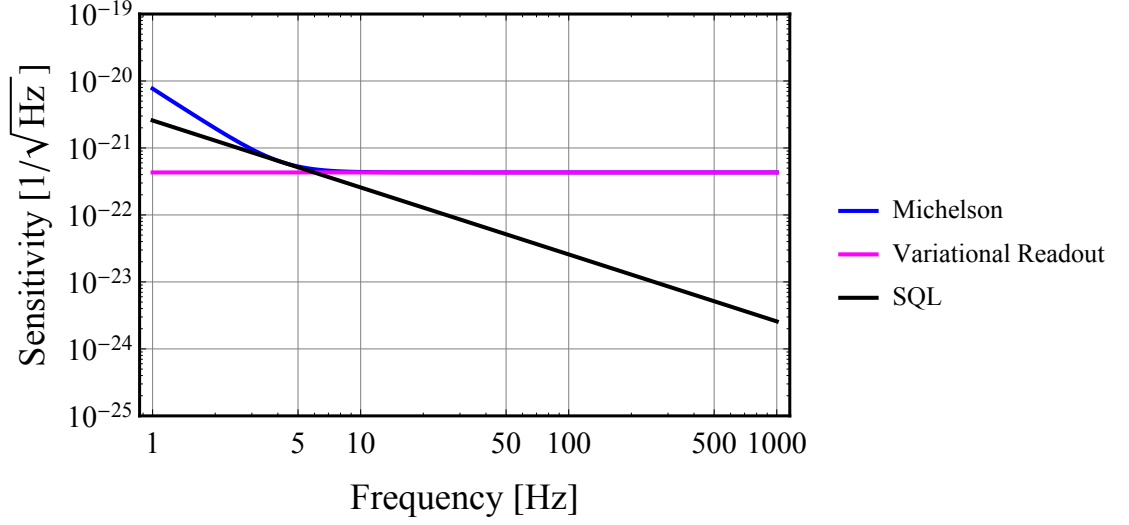


Figure 2.5: Michelson 干渉計の感度曲線と Variational Readout, 標準量子限界. 縦軸が $\sqrt{S_h(f)} [1/\sqrt{\text{Hz}}]$, 横軸は振動数である. $m = 5.6\text{kg}$, $I_0 = 10\text{kW}$, $\omega_0 = 1.77 \times 10^{15}$, $L = 1200\text{m}$ とした.

2.2.7 Noise Spectral density と Ponderomotive Squeezing

式 (2.49) の真空場の項, すなわち雑音に対応する項に注目すると

$$\begin{aligned} d_1 &= c_1 e^{2i\beta}, \\ d_2 &= (c_2 - \mathcal{K}c_1) e^{2i\beta} \end{aligned}$$

のように, 入力真空場 c の振幅ゆらぎ c_1 が出力の位相成分に見えていることがわかる. これは, 入射真空場の振幅成分 c_1 が輻射圧ゆらぎとして鏡を揺らすことで位相差が生じ, 腕を伝播する電場に位相のゆらぎを持たせたことが原因である. この現象は, 雑音楕円の面積を保ちつつ¹⁴ 振幅ゆらぎと位相ゆらぎに相関を持たせることから, Ponderomotive Squeezing と呼ばれている (図 2.6). Ponderomotive Squeezing の特徴として, Noise Spectral density と Ponderomotive Squeezing 行列の振る舞いが挙げられる.

出力 d の片側パワースペクトルとクロススペクトル¹⁵ は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} 2\pi\delta(\Omega - \Omega') S_{d_j}(f) &= \langle \text{in} | d_j d_{j'}^\dagger | \text{in} \rangle_{\text{sym}}, \\ \frac{1}{2} 2\pi\delta(\Omega - \Omega') S_{d_1 d_2}(f) &= \frac{1}{2} \langle \text{in} | (d_1 d_{2'}^\dagger + d_1^\dagger d_{2'}) | \text{in} \rangle_{\text{sym}} \end{aligned} \quad (2.59)$$

で定義される [5]. これは入力のスペクトルでも同様であり,

$$S_{c_1} = 1, S_{c_2} = 1, S_{c_1 c_2} = 0 \quad (2.60)$$

¹⁴ 真空場において, 振幅ゆらぎと位相ゆらぎは最小不確定性原理を満たす. これを保ちつつ, 片側のゆらぎを小さくし, 他方のゆらぎを大きくすることを Squeezing と呼ぶ.

¹⁵ 片側スペクトルは分散, クロススペクトルは共分散に対応している.

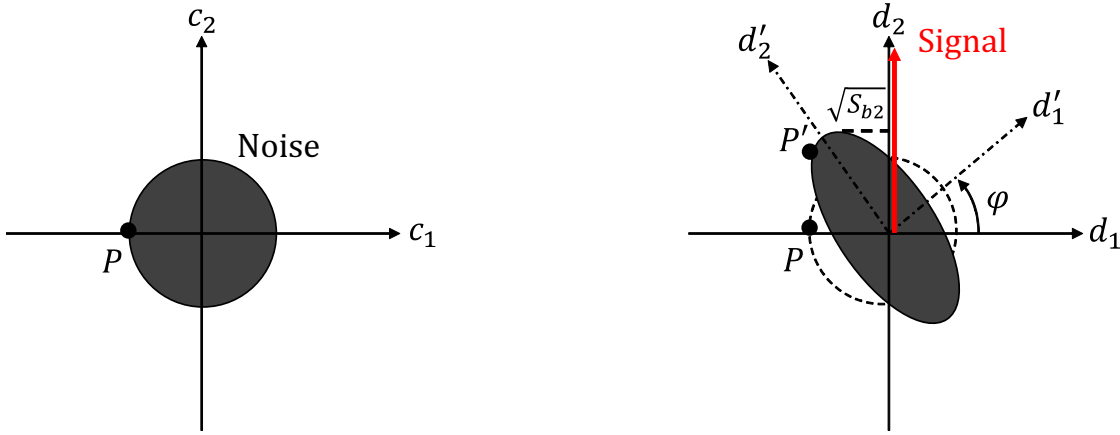


Figure 2.6: 入力 c と出力 d の雑音楕円. 左図は入力真空場であり, コヒーレントな真円になっていることがわかる. 右図は出力真空場の雑音楕円であり, 位相方向に信号も合わせて描かれている. Squeezing 行列 $S(-r, \varphi)$ により, 真円だった状態は長軸方向が e^r だけ拡大, 短軸方向が e^{-r} だけ縮小されている. また, Squeezing factor の符号が $-$ であることから雑音楕円はまず d_2 軸に Squeeze され, そこから Squeezing angle φ だけ反時計回りに回転している. ここで, d_1, d_2 軸の大きさはそれぞれの絶対値ではなく, Spectral density のルート $\sqrt{S_{d_1}}, \sqrt{S_{d_2}}$ で取ることに注意する.

が成り立つ. クロススペクトルがゼロであることから, 入力真空場の振幅・位相ゆらぎの相関がゼロであることがわかる. さらに振幅・位相ゆらぎの大きさが等しいことから, 図 2.6 のようにゆらぎの概形は真円となる. 同様にして式 (2.56) から出力のスペクトルを計算すれば

$$S_{d_1} = 1, S_{d_2} = 1 + \mathcal{K}^2, S_{d_1 d_2} = -\mathcal{K}. \quad (2.61)$$

振幅・位相ゆらぎの大きさが異なることから, 図 2.6 のようにゆらぎの概形は楕円となる. さらにクロススペクトルが非ゼロであることから, 出力真空場 d は振幅・位相ゆらぎに相関を持つ. これは前述の通り, 入力真空場の振幅ゆらぎが Michelson 干渉計内で輻射圧ゆらぎとして鏡の変位を変動させ, 位相ゆらぎとして変換されることが原因である.

また, クロススペクトルが非ゼロの値を持っているため, 楕円は図 2.6 のように傾く. ここで, 真空場 c の係数行列は楕円に対応しているように見えるが, 各成分は虚数 $e^{2i\beta}$ を含む. したがって, 実際に図 2.6 の雑音楕円に対応した行列は, 各スペクトルを成分に持った Covariance 行列 Σ_d となる:

$$\Sigma_d = \begin{pmatrix} S_{d_1} & S_{d_1 d_2} \\ S_{d_1 d_2} & S_{d_2} \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

この雑音楕円のなす傾きは Covariance 行列から求めることができる. 図 2.6 のように傾き φ をおくと, 簡単な計算から

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \frac{S_{d_1} - S_{d_2}}{2S_{d_1 d_2}} = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \frac{\mathcal{K}}{2} \quad (2.63)$$

が求められる．これは後述の Squeezing angle の値と一致しており， $\mathcal{K}$ を含むことから周波数依存性を持つことがわかる．

次に，Ponderomotive Squeezing を生じさせる行列を

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

と置く．一般に，Ponderomotive Squeezing 行列 $\mathcal{P}$ は回転行列 $R(\theta)$ と Squeezing 行列 $S(r, \varphi)$ で分解できる：

$$\mathcal{P} = S(-r, \varphi) R(-\theta) . \quad (2.65)$$

ここで，

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} , \\ S(r, \varphi) &= \begin{pmatrix} \cosh r + \sinh r \cos 2\varphi & \sinh r \sin 2\varphi \\ \sinh r \sin 2\varphi & \cosh r - \sinh r \cos 2\varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.66)$$

であり¹⁶， θ は Rotation angle， r は Squeezing factor， φ は Squeezing angle をそれぞれ表す．また Squeezing 行列は，回転行列 $R(\varphi)$ と $\varphi = 0$ の Squeezing 行列を用いて

$$S(r, \varphi) = R(\varphi) S(r, 0) R(-\varphi) \quad (2.67)$$

のように書き換えることも可能である．(2.66) から (2.65) への書き換えのためには

$$\theta = \arctan \frac{\mathcal{K}}{2} , \quad r = \operatorname{arcsinh} \frac{\mathcal{K}}{2} , \quad \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \frac{\mathcal{K}}{2} \quad (2.68)$$

とすればよい．パラメータ r, φ の振る舞いを表すグラフが図 2.7, 図 2.8 である．図 2.7, 図 2.8 より，各パラメータは低周波数帯では特徴的な振る舞いを見せるが，100Hz 以上では一定の値をとることがわかる．この理由として，各パラメータは Coupling Constant $\mathcal{K}$ で定義されており， $\mathcal{K}$ は周波数依存性を持つため，周波数によって異なる振る舞いを見せている¹⁷．また，高周波数帯においては

$$\mathcal{K} = \frac{4\omega_0 I_0}{mc^2 \Omega^2} \rightarrow 0$$

となるため，

$$r = \operatorname{arcsinh}(\mathcal{K}/2) \rightarrow 0 , \quad 2\varphi = \operatorname{arccot}(\mathcal{K}/2) \rightarrow 90 \text{ deg}$$

となり，Squeezing の影響は非常に小さくなる．これらと同様の振る舞いは，BSR, BRSE 条件下において Signal Recycling Michelson 干渉計でも見ることができる．

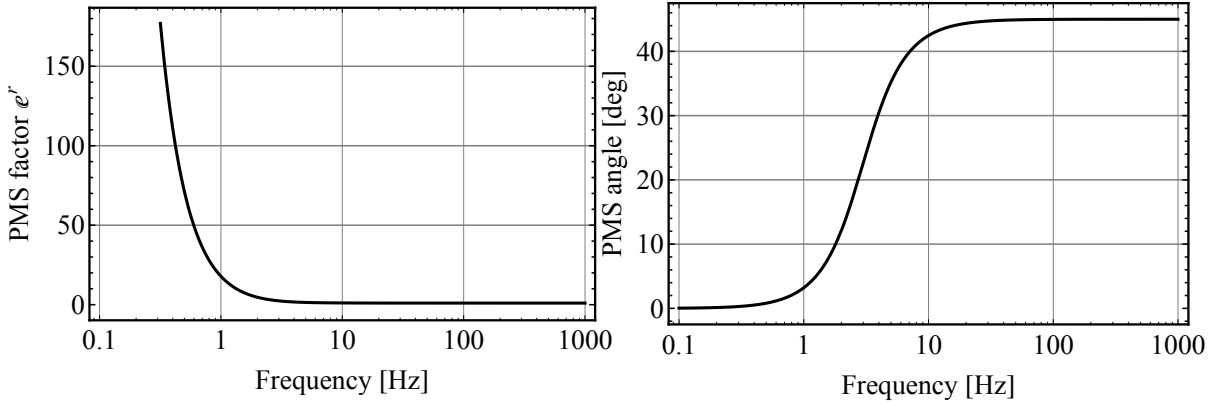


Figure 2.7: Squeezing factor r の振る舞い. **Figure 2.8:** Squeezing angle φ の振る舞い.

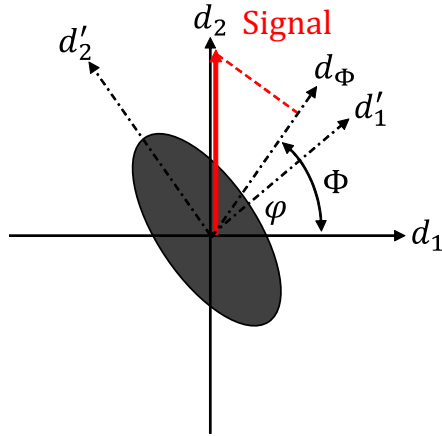


Figure 2.9: homodyne angle を ξ とした際の信号雑音比の取り方. d_1 軸からの角度が ξ であり, $\xi = \pi/2$ が従来の検出方法に対応する. ここで, 雑音だけでなく信号も射影して比をとらなければならないことに注意する.

2.2.8 Homodyne Detection

前述の通り, 従来の Michelson 干渉計の検出では b_2 方向に存在する電場のみ検出していた. 本小節では, 新たな検出方法として Homodyne detection を紹介する. Homodyne angle を ξ とし, 出力 $\mathbf{d}$ の振幅・位相ゆらぎの線形和

$$d_\xi = d_1 \cos \xi + d_2 \sin \xi = (\cos \xi \quad \sin \xi) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

を考える. 各演算子を代入して整理すると

$$d_\xi = \sin \xi \left(\frac{\sqrt{2}\mathcal{K}}{h_{\text{SQL}}} h e^{i\beta} + [c_2 + (\cot \xi - \mathcal{K})c_1] e^{2i\beta} \right). \quad (2.70)$$

¹⁶反時計回りの回転を正としている.

¹⁷具体的には, $\mathcal{K}$ は輻射圧揺らぎと鏡の振動の相関を表す factor であるため, 低周波数帯で大きな値を持つ. これが式中の $\mathcal{K} \propto \Omega^{-2}$ に見えている.

従って、信号雑音比演算子 $h_n(\Omega)$ は

$$h_n(\Omega) = \frac{h_{\text{SQL}}}{\sqrt{2\mathcal{K}}} e^{i\beta} [c_2 + c_1(\cot \xi - \mathcal{K})] \quad (2.71)$$

となる。この Homodyne detection の直感的な理解は図 2.9 であり、信号と雑音を新たな軸に射影し、その比をとっていることがわかる。ここで、信号も d_ξ 軸に射影していることから、単純に雑音の短軸を検出方向に設定すれば良いわけではないことに注意する。なお、輻射圧雑音が大きくなる低周波数帯では、 $\mathcal{K}/2 \sim \mathcal{K}$ となることから、短軸の向きと検出の最適角は一致する。

この最適角については、式 (2.71) の c_1 の係数に注目すると

$$\xi = \Phi = \text{arccot} \mathcal{K} \quad (2.72)$$

を選択すれば、入射真空場の振幅ゆらぎの項がゼロになることがわかる。この輻射圧ゆらぎを完全に回避できる手法は”Back action evasion”，その適切な Homodyne angle の選び方は”Variational Readout”と呼ばれ¹⁸，輻射圧雑音が支配的となる低周波数帯の感度を劇的に改善し、標準量子限界を超えることができる（図 2.5）。しかし、周波数依存性を持つ Homodyne angle を実現することは実験的に難しく [5]，また雑音楕円の短軸方向近傍が検出角となるため光学損失に弱いという欠点もある。これらのデメリットから、通常 Homodyne 検出では周波数依存性のある Variational Readout ではなく、固定の Homodyne angle で検出が行われる。

2.2.9 雑音楕円の面積

Covariance 行列 (2.62) と Homodyne 検出 (2.69) を合わせれば、雑音楕円の面積を計算することができる。Homodyne angle として

$$\xi = \varphi = \frac{1}{2} \text{arccot} \frac{\mathcal{K}}{2}$$

を設定する。このとき、新たな検出軸 d'_1 とそれに垂直な軸 d'_2 は雑音楕円の短軸，長軸方向を向いている。それぞれの軸は

$$\begin{aligned} d'_1 &= d_\varphi = d_1 \cos \varphi + d_2 \sin \varphi , \\ d'_2 &= d_{\varphi+\pi/2} = d_2 \cos \varphi - d_1 \sin \varphi \end{aligned} \quad (2.73)$$

と表せる。式 (2.59) と同様にして、新たな検出軸のスペクトルを計算すると

$$\begin{aligned} S_{d'_1} &= \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{K}}{2} \right)^2} - \frac{\mathcal{K}}{2} \right)^2 = e^{-2r} , \\ S_{d'_2} &= \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{K}}{2} \right)^2} + \frac{\mathcal{K}}{2} \right)^2 = e^{+2r} , \\ S_{d'_1 d'_2} &= 0 . \end{aligned} \quad (2.74)$$

¹⁸Back action evasion の手法は Variational Readout だけでなく、例えば量子回路を利用した [18] などがある。

クロススペクトルがゼロであることから、確かに新たな検出軸上で短軸，長軸をとっていることがわかる．ここで，短軸，長軸の値はそれぞれ

$$\sqrt{S_{d'_1}} = e^{-r}, \quad \sqrt{S_{d'_2}} = e^r$$

であることから， π で規格化した雑音楕円の面積は

$$e^{-r} \times e^r = 1$$

となっている．入射真空場の面積は， $S_{c_1 c_2} = 0$ であったことから単純に S_{c_1} と S_{c_2} の積でよく，

$$S_{c_1} \times S_{c_2} = 1.$$

以上より，雑音楕円の面積は入射時と出射時で保存していることがわかる．これは Michelson 干渉計の腕を真空場が伝播した際の伝達関数行列の行列式が 1 であり，等積変形となっているからである：

$$\det \mathcal{P} = 1 \times 1 - 0 \times (-\mathcal{K}) = 1.$$

物理的には，真空場は最小不確定状態を満たしながら干渉計を伝播し¹⁹，出力されることを表している．ここで，行列の一次変換によって図形の面積が変化するため，伝達関数行列の各成分が実数の際には行列式の値だけ面積は定数倍される．しかし，Covariance 行列の導入と同様で，我々の系で雑音楕円の大きさを知りたい場合には Covariance 行列の行列式の値を計算する必要がある，注意が必要である．

¹⁹真空場自身が持つゆらぎの情報を失うことなく伝播していることと同値である．

2.3 Signal Recycling Michelson 干渉計

前節では, Michelson 干渉計の Input-output relation を計算し, 干渉計感度と標準量子限界を求めた. また, Michelson 干渉計を真空場が伝播した際に振幅ゆらぎが位相ゆらぎに変換される Ponderomotive Squeezing について述べた. 本節では, 標準量子限界を超える手法の1つである Signal Recycling を紹介し, これを含んだ干渉計の Input-output relation と感度を求める. また, Signal Recycling Michelson 干渉計における特徴的な振る舞いとして「光ばね」と呼ばれる現象を説明する. 次章で述べるが, 我々の考案した非線形光学結晶設置型重力波検出器では, この光ばねを固くすることにより, 高周波数帯における感度の向上を実現している.

2.3.1 Input-output relation

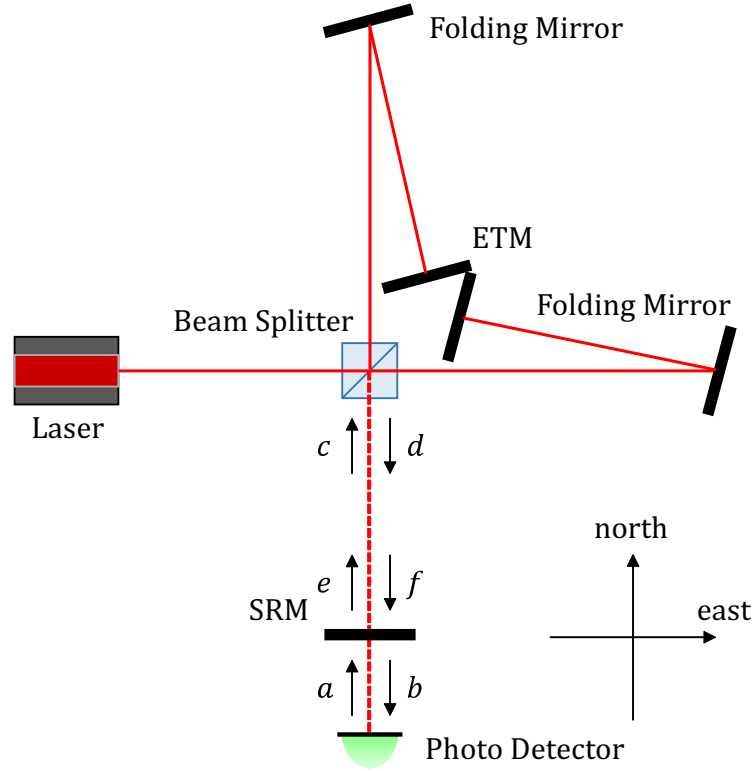


Figure 2.10: 折り返し鏡のある Michelson 干渉計に Signal Recycling mirror を付け加えた全体の場の定義. Signal Recycling mirror の振幅反射率, 透過率をそれぞれ ρ , τ とした.

Michelson 干渉計に Signal Recycling mirror を設置した際の場を図 2.10 のように定義する. Michelson 干渉計の dark port から入射した真空場の Input-output relation は前節の計算通り

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} e^{2i\beta} + \alpha h e^{i\beta} \mathbf{e}_{\text{phase}} \quad (2.75)$$

である．ここで，

$$\alpha = \frac{\sqrt{2\mathcal{K}}}{h_{\text{SQL}}} \quad (2.76)$$

とした．Signal Recycling mirror を導入した干渉計では，干渉計への入射真空場が $\mathbf{c}$ から $\mathbf{a}$ に変更される．Signal Recycling mirror の振幅反射率，透過率をそれぞれ ρ , τ とし，Signal Recycling mirror から Beam Splitter までの場の回転行列を $R(\phi)$ とすれば²⁰，場の連立方程式は

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -\rho\mathbf{a} + \tau\mathbf{f} , \\ \mathbf{e} &= \rho\mathbf{f} + \tau\mathbf{a} , \\ \mathbf{f} &= R(\phi)\mathbf{d} , \\ \mathbf{c} &= R(\phi)\mathbf{e} , \end{aligned}$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} e^{2i\beta} + \alpha h \mathbf{e}_{\text{phase}} e^{i\beta} \quad (2.77)$$

となる．これを解くと， $a - b$ の Input-output relation は²¹

$$\mathbf{b} = \frac{1}{M} (\mathbb{A}\mathbf{a}e^{2i\beta} + \mathbb{H}he^{i\beta}) . \quad (2.78)$$

ここで， $\mathbb{A}$, $\mathbb{H}$ は真空場 $\mathbf{a}$ と信号 h の伝達関数行列である．伝達関数行列の各成分は以下の通りである：

$$A_{11} = (1 + \rho^2) \left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2\rho \cos 2\beta, \quad (2.79)$$

$$A_{12} = -\tau^2 (\sin 2\phi + \mathcal{K} \sin^2 \phi), \quad (2.80)$$

$$A_{21} = \tau^2 (\sin 2\phi - \mathcal{K} \cos^2 \phi), \quad (2.81)$$

$$A_{22} = (1 + \rho^2) \left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2\rho \cos 2\beta, \quad (2.82)$$

$$H_1 = -\tau\alpha (1 + \rho e^{2i\beta}) \sin \phi, \quad (2.83)$$

$$H_2 = \tau\alpha (1 - \rho e^{2i\beta}) \cos \phi, \quad (2.84)$$

また，

$$M = 1 + \rho^2 e^{4i\beta} - 2\rho e^{2i\beta} \left(\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) . \quad (2.85)$$

²⁰Michelson 干渉計の腕では基線長を波長の整数倍としていたため R は単位行列となる．

²¹通常，連立方程式を解くためには Mathematica などの計算ソフトを用いる．しかし，光学損失を含めた場の方程式を解く際には変数が多いため計算ソフトが機能しない場合がある．手計算で連立方程式を解く手法については 4.1 節で述べるため，そちらを参照することとする．

2.3.2 雑音スペクトルと楕円の面積

得られた行列の成分を用いて入射真空場 $\mathbf{a}$ のなす雑音楕円について調べる．式 (2.59) をもとに出力 $\mathbf{b}$ のスペクトルを計算すると

$$\begin{aligned} S_{b_1} &= \frac{1}{|M|^2} (|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2) , \\ S_{b_2} &= \frac{1}{|M|^2} (|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2) , \\ S_{b_1 b_2} &= \frac{1}{|M|^2} (\Re[A_{11}A_{21}^* + A_{12}A_{22}^*]) . \end{aligned} \quad (2.86)$$

ここで， $\Re[A]$ は A の実部を示す．式 (2.74) より，出力真空場 $\mathbf{b}$ のなす雑音楕円の傾き φ_{SR} は

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{SR}} &= \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \frac{S_{b_1} - S_{b_2}}{2S_{b_1 b_2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left[\frac{(|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2) - (|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2)}{2\Re[A_{11}A_{21}^* + A_{12}A_{22}^*]} \right] \end{aligned} \quad (2.87)$$

と書ける．これを用いて楕円の面積を計算すると

$$S_{b_{\varphi_{\text{SR}}}} \times S_{b_{\varphi_{\text{SR}} + \pi/2}} = 1$$

が得られる．したがって，SR Michelson 干渉計においても真空場の最小不確定状態は保たれていることがわかる．物理的には，導入した SR mirror の前後で真空場の情報が失われていないこと，SR 共振器の回転行列は楕円の向きを変更するだけの等積変形を示す行列であることが理由である．

2.3.3 感度曲線と光ばね

前節と同様にして， b_2 方向の信号雑音比の片側パワースペクトル密度を求めると

$$S_h(f) = \frac{|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2}{|H_2|^2} \quad (2.88)$$

である．また，Homodyne detection で検出を行う場合のスペクトルは，

$$\mathbf{w} = (\cos \xi \quad \sin \xi) \quad (2.89)$$

として

$$S_h^\xi(f) = \frac{\mathbf{w} \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{w}^T}{\mathbf{w} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{w}^T} \quad (2.90)$$

と計算できる [10]．

Signal Recycling Michelson 干渉計は回転行列 $R(\phi)$ の回転角によって，広帯域な (Broadband) 干渉計と狭帯域な (Narrowband) 干渉計に分かれる． $\phi = 2\pi$ のとき，すなわち Signal Recycling 共振器で共振している状態と， $\phi = \pi/2$ のとき，すなわち反

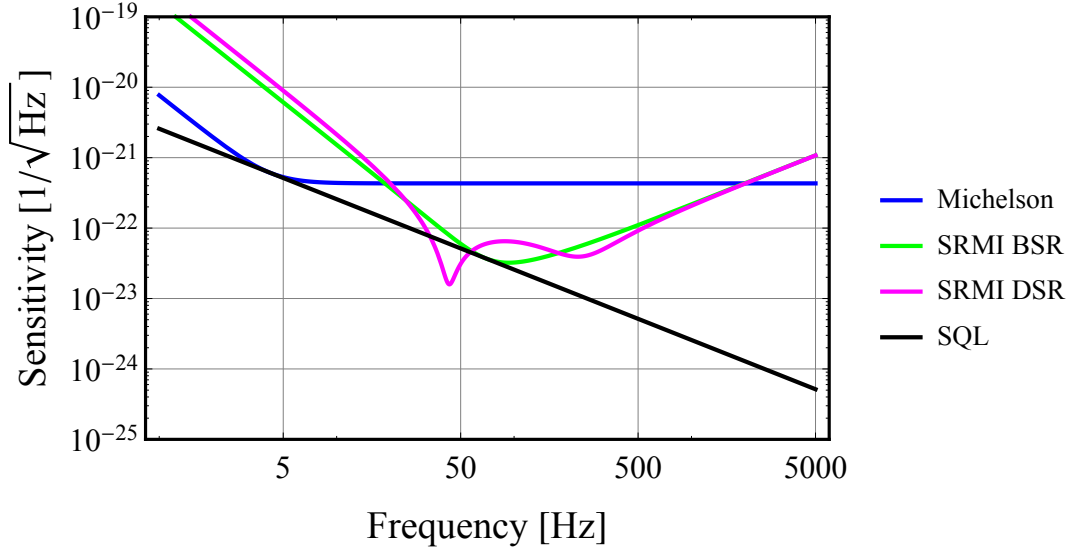


Figure 2.11: 青線が Michelson 干渉計, 緑線が Broadband($\phi = 2\pi$) な Signal Recycling Michelson 干渉計, 紫線が Detuned Signal Recycling Michelson 干渉計, 黒線が標準量子限界を表す. Detune angle $\phi = 0.315$ としており, その他のパラメータは図 2.5 と同様である.

共振している状態は広帯域に対応している. 逆に, 共振・反共振でない場合には狭帯域な干渉計となる. このように, SR 共振器の光路長を意図的に波長の整数倍からずらすことを「Detune する」と呼び, 我々の考案した干渉計はこちらに属している. その理由として, 広帯域の干渉計は広帯域でそれなりの感度を持つが標準量子限界は超えられず, 狭帯域の干渉計はある特定の周波数では標準量子限界を超えることができるからである (図 2.11). これは, SR mirror の位置をあえて共振点からずらすことで SR 共振器内の Sideband があたかも機械的なばねのように振る舞う「光ばね」が発生し, 干渉計のダイナミクスが変更されていることが原因である. 低周波数側の dip は「mechanical resonance」と呼ばれており [12], 光ばねの共振周波数と一致する²². 右側の dip は「optical resonance」と呼ばれており, Sideband の共振周波数に対応している.

光ばねは干渉計内の Sideband が機械的なばねのように振る舞う現象であるため, 信号も共振周波数近辺で増幅される. この共振周波数 Ω_{OS} を求めるためには, 式 (2.85) がゼロになる周波数を計算すればよい. $\beta \ll 1$ より $e^{2i\beta} \sim 1$ とすれば,

$$\Omega_{OS} \simeq \sqrt{\frac{4\omega_0 I_0 \sin 2\phi}{mc^2} \left\{ \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) - 2 \cos 2\phi \right\}^{-1}} \quad (2.91)$$

が得られる. ここで, 光ばねが出現するために $\phi \neq 2\pi, \pi/2$ と仮定している. 式 (2.91) より, 共振周波数を高周波数帯に移動させるためには (1) 鏡を軽くする (2) レーザーパワー I_0 を上げることが必要であることがわかるが, これらは並行して実践すること

²²厳密には一致しないが, dip の周波数と光ばねの共振周波数は $\rho \rightarrow 1$ の極限で一致する. 我々の系では $\rho = \sqrt{0.99}$ としているため, ここでは一致するとして計算を進める.

が難しい．軽い鏡を用いて入射レーザーパワーを上昇させると，熱雑音や Parametric Instability[14] の影響が大きくなる可能性があり，かつ実験的にもハイパワーレーザーの作成は困難である．我々の干渉計ではこれらのデメリットを排除するため，Beam Splitter と SR mirror の間に非線形光学結晶を設置し，実効的な入射レーザーパワーを上昇させている．

低周波数側の dip について，上記とは別のアプローチを紹介する [17]．具体的には，「光ばねによって信号が増幅した」という視点ではなく，「dip の近傍で雑音が減少した」という視点からのアプローチである．

SR Michelson 干渉計のスペクトル (2.90) より， $1/M$ の因子は分子と分母でキャンセルされている．この事実から，スペクトル (2.90) を最小とするような周波数について考える．ここでは具体例として $\xi = 90 \text{ deg}$ と $\xi = 45 \text{ deg}$ について計算を行う．

$\xi = 90 \text{ deg}$ について，スペクトルの具体形は (2.88) で与えられている．式 (2.84) より，分母である $|H_2|$ は dip の周波数に寄与しない．したがって，分子である $|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2$ に注目する．これが最小となるのは，量子雑音源である $|A_{21}|$ ， $|A_{22}|$ について， $|A_{21}| = 0$ かつ $|A_{22}| = 0$ となるときである．この周波数をそれぞれ Ω_{21} ， Ω_{22} とすれば，式 (2.81)(2.82) より

$$\Omega_{21} = \sqrt{\frac{2\omega_0 I_0}{mc^2 \tan \phi}}, \quad (2.92)$$

$$\Omega_{22} = \sqrt{\frac{2\omega_0 I_0 \sin 2\phi(\rho + 1/\rho)}{mc^2[2 - (\rho + 1/\rho) \cos 2\phi]}}. \quad (2.93)$$

したがって， $|A_{21}|$ と $|A_{22}|$ は同時にゼロになることは無く，各々の雑音が最小となる周波数は異なる（図 2.12）．実際の低周波数側の dip はこれらの和の最小値であるため，図 2.12 のように $|A_{21}| = 0$ と $|A_{22}| = 0$ の近傍となる．また，(2.91)(2.92)(2.93) は全て式の形が異なるが， $\rho \rightarrow 1$ の極限では一致する．

$\xi = 45 \text{ deg}$ について，スペクトルの具体形は

$$S_h(f) = \frac{|A_{11} + A_{21}|^2 + |A_{12} + A_{22}|^2}{|H_1 + H_2|^2} \quad (2.94)$$

となる． $\xi = 90 \text{ deg}$ のときと同様に $|A_{11} + A_{21}| = 0$ ， $|A_{12} + A_{22}| = 0$ となる周波数を求めると

$$\Omega_{11+21} = \sqrt{\frac{2\omega_0 I_0}{mc^2}} \sqrt{\frac{\cos \phi[(1 + \rho^2) \sin \phi - (1 - \rho^2) \cos \phi]}{2\rho - [(1 - \rho^2) \sin 2\phi + (1 + \rho^2) \cos 2\phi]}}, \quad (2.95)$$

$$\Omega_{12+22} = \sqrt{\frac{2\omega_0 I_0}{mc^2}} \sqrt{\frac{\sin \phi[(1 + \rho^2) \cos \phi - (1 - \rho^2) \sin \phi]}{2\rho + [(1 - \rho^2) \sin 2\phi - (1 + \rho^2) \cos 2\phi]}} \quad (2.96)$$

となり，最小となる周波数は一致しない（図 2.12）．さらに， $\xi = 90 \text{ deg}$ の結果と異なる周波数であることから，Homodyne angle ξ を変化させた際に光ばねの共振周波数はわずかに変化することがわかる（図 2.14）．Homodyne angle によって mechanical resonance の周波数が変化する現象は，直感的には雑音楕円を用いて理解できる．入射真空場 $\mathbf{a}$ の雑音楕円の傾き φ_{SR} は周波数に依存しており，

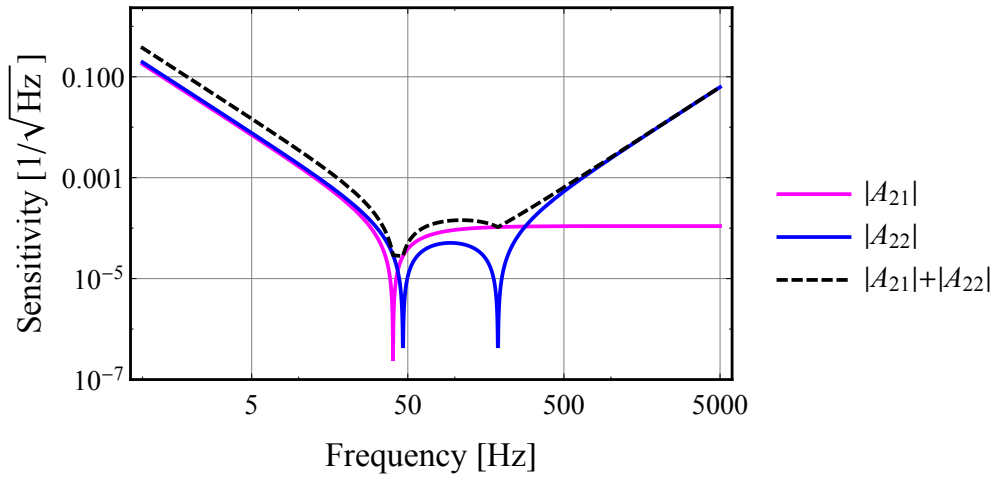


Figure 2.12: $|A_{21}|$ と $|A_{22}|$, $|A_{21}| + |A_{22}|$ のグラフ．雑音が最小となる振動数は異なっている．雑音の和である黒点線はこの振動数のずれによって dip が鈍っており，図 2.11 の感度曲線はこの振る舞いに一致している．

$\xi = 45 \text{ deg}$, $\xi = 90 \text{ deg}$ における最小の周波数は全て $\rho \rightarrow 1$ の極限で Ω_{OS} と一致するため，以降の章では Ω_{OS} を用いる．しかし，Homodyne angle を変化させた際の dip の周波数変化については，雑音が最小となるアプローチからでなければ説明することができないことには注意が必要である．

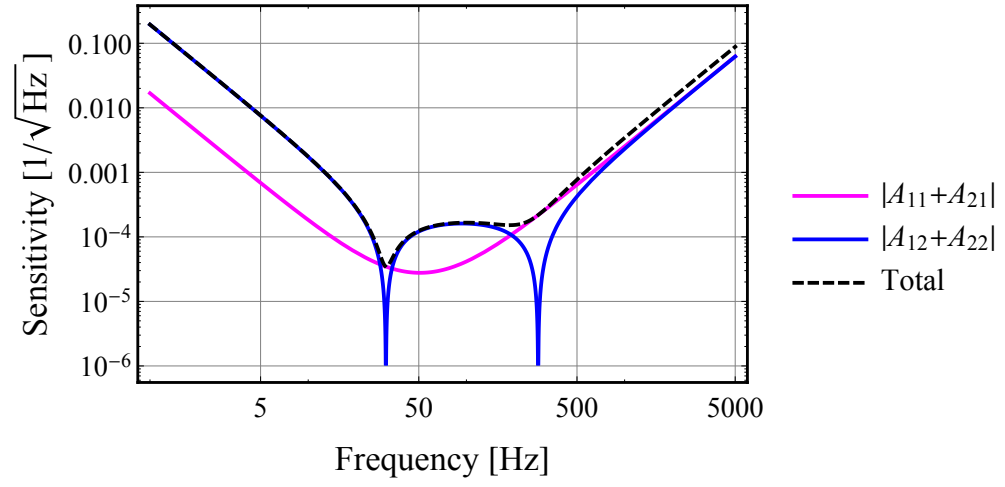


Figure 2.13: $|A_{11} + A_{21}|$ と $|A_{12} + A_{22}|$, その合計のグラフ.

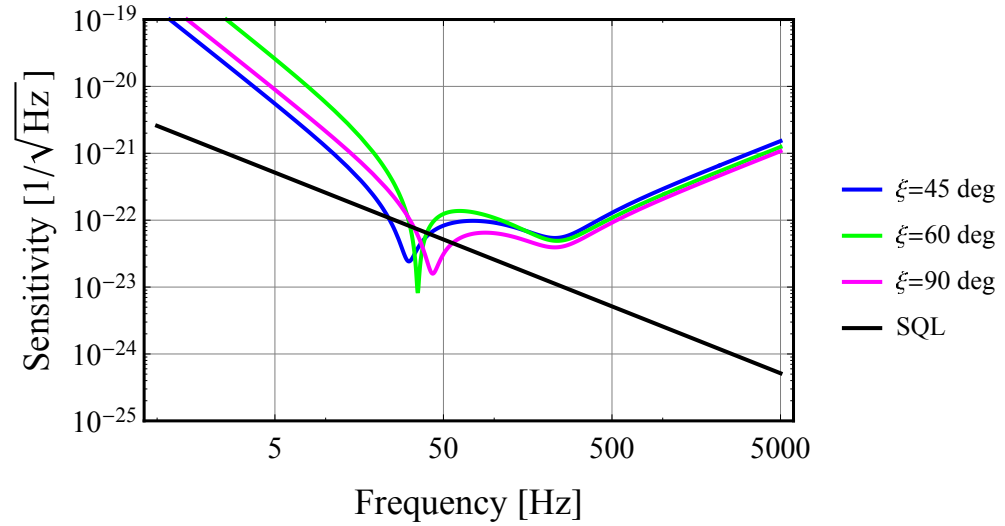


Figure 2.14: $\xi = 45 \text{ deg}$, $\xi = 60 \text{ deg}$, $\xi = 90 \text{ deg}$ のグラフ. Homodyne angle の変化に伴い低周波数側の dip の周波数も変化していることがわかる.

Chapter 3

次世代型重力波検出器

重力波検出器の感度曲線（図 1.4）から，高周波数帯は量子雑音によって制限されていることがわかる．したがって，量子雑音の視点から見た重力波検出器のアップグレードの課題として，高周波数帯の感度の向上が挙げられる．高周波数帯の感度向上のアイデアとしては White Light Cavity[15] などが挙げられるが，その実現は難しいとされている．また，光ばねの共振周波数を高くすることでも高周波数帯の感度を向上させることができるが，入射レーザーパワーの上昇には様々な問題があることを述べた．これらの問題点を解決するため，本章では非線形光学結晶を SR 共振器内に設置した検出器について述べる [8]．非線形光学効果により入射レーザーパワーを実効的に向上させ，光ばねの共振周波数を固くし，高周波数帯で標準量子限界を超える検出器が実現する．また，量子雑音を扱う上で光学損失による影響が問題となるが，こちらは次章に回し，本章は Lossless の系での結果を述べる．

3.1 非線形光学効果

3.1.1 非線形光学における電気感受率

線形光学において，媒質中の電束密度 $\mathbf{D}(t)$ は，電場 $\mathbf{E}(t)$ と分極 $\mathbf{P}(t)$ を用いて

$$\mathbf{D}(t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(t) + \mathbf{P}(t) = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E}(t) \quad (3.1)$$

で与えられる．ここで， ϵ_0 は真空の誘電率， χ_e は電気感受率を表す．この関係式により，媒質中の誘電率は

$$\epsilon \equiv (1 + \chi) \epsilon_0 \quad (3.2)$$

で定義される．また各ベクトルは，振幅成分と位相成分に分けて $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} e^{-i\omega t}$ のように書ける．式 (3.1) の変形において，誘電分極 $\mathbf{P}(t)$ は電場 $\mathbf{E}(t)$ に比例するという関係を用いた：

$$\mathbf{P}(t) = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}(t) . \quad (3.3)$$

ここで，上式は電場の強度が小さいときに成り立つ式であることに注意する必要がある．電磁波の電界強度 $|\mathbf{E}(t)|^2$ が大きくなるにつれ，電気感受率は

$$\mathbf{P}(t) = \chi(\mathbf{E}(t)) \epsilon_0 \quad (3.4)$$

のような電場依存の式で書けるようになり，誘電分極 $\mathbf{P}(t)$ はもはや式 (3.3) のような比例関係で記述することはできなくなる．

以下では簡単のために電場 $\mathbf{E}(t)$ と誘電分極 $\mathbf{P}(t)$ をスカラー量であるとして計算を進める．式 (3.4) を $E(t)$ について摂動展開し，

$$\begin{aligned} P(t) &= \epsilon_0[\chi^{(1)}E(t) + \chi^{(2)}E^2(t) + \chi^{(3)}E^3(t) + \cdots] \\ &\equiv P^{(1)}(t) + P^{(2)}(t) + P^{(3)}(t) + \cdots \end{aligned} \quad (3.5)$$

のように分極を定義する．式 (3.3) と (3.5) を比較すれば，線形光学での電気感受率は (3.5) における $\chi^{(1)}$ に対応していることがわかる．ここで，(3.5) の $\chi^{(2)}$ と $\chi^{(3)}$ はそれぞれ 2 次の非線形感受率，3 次の非線形感受率と呼ばれ，テンソル量として表される．例えば 2 次の非線形感受率は，分極成分 P_i に対し 2 つの電場成分 E_j ， E_k の積で得られるため，3 階のテンソルとして $\chi_{ijk}^{(2)}$ で表される．これらの非線形感受率に対応して，非線形分極は $P^{(2)}(t) = \epsilon_0\chi_{ijk}^{(2)}E(t)^2$ と定義される．

実電荷と実電流が存在しない場合，非線形な媒質中の電磁場の振る舞いは次の波動方程式で表される：

$$\Delta E(t) - \epsilon\mu \frac{\partial^2 E(t)}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2} . \quad (3.6)$$

この式の右辺は媒質中の電子に加わる加速度に対応しており，すなわち，電磁場の放射を示す項である．よって，非線形な媒質における電磁場は非線形分極 $P(t)$ により発生した電磁波と入射電場との非線形相互作用で記述することができる．我々の系では 2 次の非線形感受率を持つ非線形光学結晶を用いているため，次小節では具体的な現象について定性的に述べる．

3.1.2 非線形光学過程

異なる周波数 ω_1 ， ω_2 を持つ 2 つの電磁場 $E_1(t)$ ， $E_2(t)$ が，2 次の非線形感受率を持つ光学結晶に入射する場合を考える．系に入射する電場 $E(t)$ は

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_1e^{-i\omega_1 t} + E_2e^{-i\omega_2 t} + \text{c.c.} \quad (3.7)$$

で表される．c.c. は複素共役を表す．このとき，結晶中の 2 次の非線形分極 $P^{(2)}(t)$ は，(3.5) を用いて

$$\begin{aligned} P^{(2)}(t) &= \epsilon_0\chi^{(2)}E^2(t) \\ &= \epsilon_0\chi^{(2)}[\{E_1^2e^{-2i\omega_1 t} + E_2^2e^{-2i\omega_2 t} \\ &\quad + 2E_1E_2e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + 2E_1E_2^*e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} + \text{c.c.}\} + 2(E_1E_1^* + E_2E_2^*)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

のように計算できる．式 (3.9) の各項の位相部分について見れば，分極の誘起によって放出される電磁場の周波数がわかる．例えば $[\cdot]$ 内の第 1 項は周波数 2 倍の波 $2\omega_1$ を放出する過程に，第 3 項は和周波 $\omega_1 + \omega_2$ を放出する過程（和周波発生）に対応している．第 4 項は差周波発生と呼ばれる過程に対応しており，入射した周波数の差 $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ の周波数を放出する ($\omega_1 > \omega_2$)．図 3.1 から読み取れるように，差周波発生過程では周波数 ω_1 の光子が消滅し， ω_2 と ω_3 の周波数を持つ光子が生成される．すなわち，結晶

に入射した2つの電磁場の内、周波数の低い $E_2(t)$ が増幅されている．差周波発生におけるこのような増幅過程は光パラメトリック増幅（Optical Parametric Amplification : OPA）と呼ばれる．

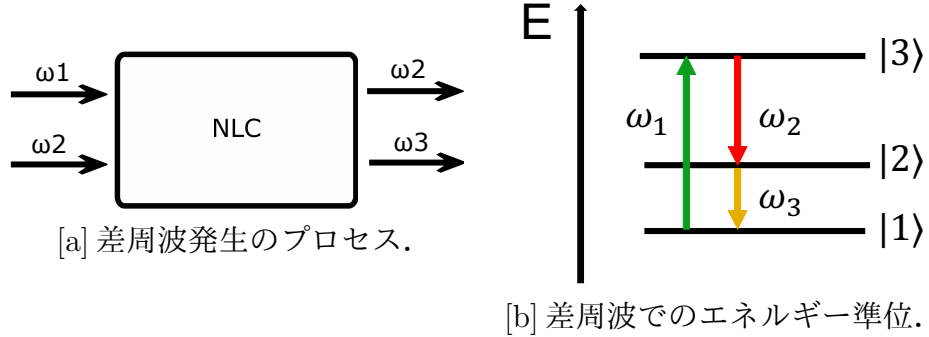


Figure 3.1: 非線形光学結晶で生じる差周波のプロセス.

図 3.1(b) のエネルギー準位の図について説明する．まず基底状態 $|1\rangle$ にあった結晶中の原子が ω_1 の光子を吸収し、仮想励起状態 $|3\rangle$ に励起される．励起された原子は周波数 ω_2 を持つもう一つの入射波に刺激（誘導）され、 ω_2 、 ω_3 の光子を放出し、基底状態へ戻る（誘導放出過程）．また、この過程は2つ目の入射波 $E_2(t)$ が存在していない場合でも起こり得る．すなわち、励起状態 $|3\rangle$ から自然に ω_2 、 ω_3 の光子を放出して基底状態に戻るのである．この過程は自然放出と呼ばれるが、誘導放出に比べ、放出される電磁場の強度は弱くなる．

このような差周波発生に用いられる非線形光学結晶が Fabry-Perot Cavity のような共振器に設置された場合、誘導放出過程で放出された ω_2 、 ω_3 の波は、共振器長を合わせることによって非常に大きな強度を持つ．このような、共振器と非線形光学結晶を用いた光増幅器のことを光パラメトリック発振器（Optical Parametric Oscillator : OPO）と呼ぶ．入射波と出力波の名称については、 ω_1 の光をポンプ光、取得したい周波数 ω_2 (ω_3) を持つ出力光をシグナル光、必要でない周波数 ω_3 (ω_2) を持つもう一方の出力光をアイドラー光と呼ぶ．シグナル光とアイドラー光は、名称こそ区別しているものの、物理的には等価な関係である．我々の系で扱う非線形光学結晶も光パラメトリック発振器に分類される．

3.1.3 OPA と信号増幅

光パラメトリック過程について詳細を述べる． $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ の関係式から、ポンプ光のエネルギーがシグナル光、アイドラー光に分配されていることがわかる．すなわち、誘導放射のシード光である ω_2 と差周波 ω_3 は、光パラメトリック過程で増幅されている．この OPA によって我々の系では信号 Sideband の増幅を行っている．

SR 共振器内に非線形光学結晶を設置した場合に生じる OPA を考える．Michelson 干渉計からの出力 d は非線形光学結晶を通過し、光パラメトリック増幅の作用を受ける．これを SR mirror で打ち返し再度結晶を通過させれば、さらなる増幅が可能となる¹．

¹我々の系において結晶通過はワンパスであるため、実際には Michelson 干渉計の伝播後に再度結晶

ただし、この増幅効果 g が共振器内を伝播した際の損失 Δ より大きくなる ($g > \Delta$) と光学不安定性が生じてしまうため、注意が必要である。逆に、意図的に $g > \Delta$ とすれば、光パラメトリック発振 (OPO) を起こすことができる。これはレーザーなどの光学装置に使用されている。

増幅効果は Squeezing factor r で記述される。結晶による非線形光学効果は式 (2.66) の通りである。(2.66) では r の値を鏡と Sideband の Coupling Constant で定義したが、非線形光学結晶による OPA では

$$r \propto |\chi^{(2)} E_{\text{pump}}| \quad (3.9)$$

で与えられる。式 (3.9) より、結晶に入射するポンプ光のパワーを大きくすれば増幅作用を高めることができ、15dB 程度の Squeezing factor が測定された実験もある [16]。

3.2 非線形光学結晶設置型重力波検出器

3.2.1 Input-output relation

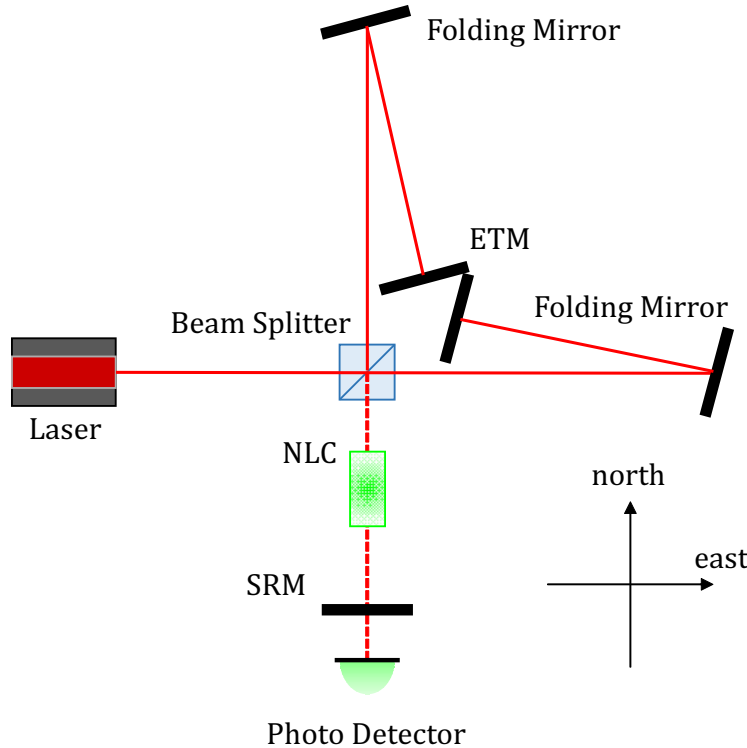


Figure 3.2: 折り返し鏡のある Michelson 干渉計に Signal Recycling mirror, 非線形光学結晶を付け加えた全体の場合の定義。Signal Recycling mirror の振幅反射率, 透過率をそれぞれ ρ , τ , Squeezing factor を $e^r = s$ と置いた。

を通過する。

Michelson 干渉計に Signal Recycling mirror, 非線形光学結晶を設置した場を図 3.2 のように定義する. ここで, Signal Recycling mirror の振幅反射率, 透過率をそれぞれ ρ , τ とした. また, SR 共振器内の回転行列 $R(\theta)$ と非線形光学結晶による Squeezing 行列 $S(r, \varphi)$ の定義は (2.66) で与えられる. Squeezing 行列において Squeezing angle $\varphi = 0$ とすると, 式 (2.66) は

$$S(r, 0) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}$$

と計算できる. さらに $e^r = s$ とおけば, $S(r, 0) = S(s)$ として

$$S(s) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

のように書き直すことができる. $\mathbf{d}$ に含まれる信号は位相方向のみに存在しており, 我々の系では信号増幅による光ばねの硬化を目的としているため, 以下 $\varphi = 0$, $0 < s < 1$ と設定する². この変換によって雑音楕円は振幅ゆらぎが s 減少し, 位相ゆらぎが $1/s$ で増加しており, その面積は不変である. また, 信号 h の増幅が目的であることから, Beam Splitter から SR mirror へのパスでのみ結晶を通過するとする.

以上を踏まえると, 結晶設置型重力波検出器における場の連立方程式は

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= -\rho \mathbf{a} + \tau \mathbf{f}, \\ \mathbf{e} &= \rho \mathbf{f} + \tau \mathbf{a}, \\ \mathbf{f} &= R(\phi) S(s) \mathbf{d}, \\ \mathbf{c} &= R(\phi) \mathbf{e}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} e^{2i\beta} + \alpha h \mathbf{e}_{\text{phase}} e^{i\beta} \quad (3.11)$$

となる. したがって $a - b$ の Input-output relation は

$$\mathbf{b} = \frac{1}{M} (\mathbb{A} \mathbf{a} e^{2i\beta} + \mathbb{H} h e^{i\beta}) . \quad (3.12)$$

前節同様に, $\mathbb{A}$, $\mathbb{H}$ は真空場 $\mathbf{a}$ と信号 h の伝達関数行列である. 伝達関数行列の各成分は以下のように変更される:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (1 + \rho^2) \left(\frac{1 + s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2s\rho \cos 2\beta - \frac{1 - s^2}{2} \tau^2, \\ A_{12} &= -\tau^2 \left(\frac{1 + s^2}{2} \sin 2\phi + \mathcal{K} \sin^2 \phi \right), \\ A_{21} &= \tau^2 \left(\frac{1 + s^2}{2} \sin 2\phi - \mathcal{K} \cos^2 \phi \right), \\ A_{22} &= (1 + \rho^2) \left(\frac{1 + s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) - 2s\rho \cos 2\beta + \frac{1 - s^2}{2} \tau^2, \end{aligned}$$

² $\varphi = 90 \text{ deg}$, $s > 1$ と等価である. 詳細は図 2.6 を参照.

$$\begin{aligned} H_1 &= -\tau\alpha(1 + s\rho e^{2i\beta})\sin\phi, \\ H_2 &= \tau\alpha(1 - s\rho e^{2i\beta})\cos\phi. \end{aligned}$$

また,

$$M = s + s\rho^2 e^{4i\beta} - 2\rho e^{2i\beta} \left(\frac{1+s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right). \quad (3.13)$$

これらの成分は, 非線形光学結晶の Squeezing factor $r = 0$, すなわち $s = 1$ の際には式 (2.79) から式 (2.85) の結果を再現する.

3.2.2 雑音スペクトルと楕円の面積

得られた行列の成分を用いて入射真空場 $\mathbf{a}$ のなす雑音楕円について調べる. 出力 $\mathbf{b}$ のスペクトルと雑音楕円の傾きは, 式 (2.86)(2.87) と同様に

$$\begin{aligned} S_{b_1} &= \frac{1}{|M|^2} (|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2), \\ S_{b_2} &= \frac{1}{|M|^2} (|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2), \\ S_{b_1 b_2} &= \frac{1}{|M|^2} (\Re[A_{11}A_{21}^* + A_{12}A_{22}^*]), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{NLC}} &= \frac{1}{2} \text{arccot} \frac{S_{b_1} - S_{b_2}}{2S_{b_1 b_2}} \\ &= \frac{1}{2} \text{arccot} \left[\frac{(|A_{11}|^2 + |A_{12}|^2) - (|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2)}{2\Re[A_{11}A_{21}^* + A_{12}A_{22}^*]} \right] \end{aligned} \quad (3.15)$$

と計算できる. これを用いて楕円の面積を計算すると, SR Michelson 干渉計の結果と同様, 真空場の最小不確定状態は保存されていることがわかる:

$$S_{b_{\varphi_{\text{NLC}}}} \times S_{b_{\varphi_{\text{NLC}}+\pi/2}} = 1. \quad (3.16)$$

これは, 非線形光学結晶による一次変換も等積変形であることによる. 以上より, Lossless の環境下では真空場の最小不確定状態が常に保存していると言える.

3.2.3 感度曲線と光ばね

前章と同様にして光ばねの共振周波数 Ω_{OS} を求める. $e^{2i\beta} \sim 1$ とし³, $M = 0$ を解けば

$$\Omega_{\text{OS}} \simeq \sqrt{\frac{4\omega_0(I_0/s) \sin 2\phi}{mc^2} \left\{ \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) - \left(s + \frac{1}{s} \right) \cos 2\phi \right\}^{-1}}. \quad (3.17)$$

式 (3.17) より, 入射レーザーパワー I_0 が I_0/s に変更されていることがわかる. 信号増幅の系では $s < 1$ であるため, 実効的な入射レーザーパワーが上昇していることが見て取れる. この作用により, 光ばねの共振周波数を高周波数帯側へ移動させていくことが可能となる.

³この近似は光ばねの共振周波数が kHz 帯であっても十分に成り立つ.

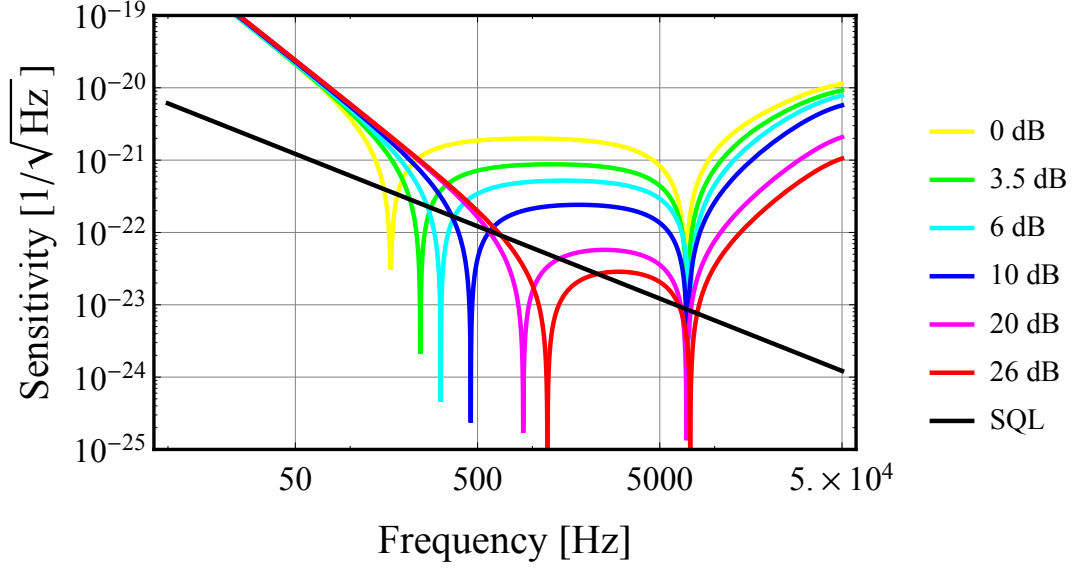


Figure 3.3: 非線形光学結晶を用いた重力波検出器の感度曲線. $m = 2g$, $\rho = \sqrt{0.99}$ とし, Homodyne angle は 45 deg としている. これより, 右側の dip の周波数は変えずに左側の dip を高周波数帯に変更できていることがわかる.

また, b_2 方向の信号雑音比片側スペクトル密度を求めると

$$S_h(f) = \frac{|A_{21}|^2 + |A_{22}|^2}{|H_2|^2} \quad (3.18)$$

であり, Homodyne detection で検出を行う場合のスペクトルは,

$$S_h^\xi(f) = \frac{\mathbf{w} \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{w}^T}{\mathbf{w} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{w}^T} \quad (3.19)$$

と計算できる. Squeezing factor の値を変化させた際の感度曲線を図 3.3 に示す. 図 3.3 より, Squeezing factor の増加に伴い光ばねの共振周波数が高くなっていく様子が見て取れる. ここで, Squeezing を記述する次元に合わせるため

$$g = -20 \log_{10} s \text{ [dB]} \Leftrightarrow s = 10^{-\frac{g}{20}}$$

を用いた.

ここで注目すべきことは, Squeezing factor の上昇に伴い, その detune angle ϕ の値が変化していることである (表 3.1). 式 (3.17) について, 根号の中身が正のときに光ばねの共振周波数は実数となり, 図 3.3 における低周波数側の dip が出現する. 根号の中身が負の場合, Ω_{OS} は純虚数となりこの dip は消滅する. これは一般化された周波数

$$\omega = \Re[\omega] + i\Im[\omega]$$

で記述される振動 $Ae^{-i\omega t}$ について考えた際に, $\Re[\omega]$ は実際の振動項に, $\Im[\omega]$ は減衰項に対応していることから理解できる. したがって, 光ばねの共振周波数を高周波数帯に移動させる目的のもとでは根号の中身が正である必要がある:

$$\rho + \frac{1}{\rho} > \left(s + \frac{1}{s}\right) \cos 2\phi. \quad (3.20)$$

SQ factor [dB]	detune angle [deg]
0 dB	10.0 deg
3.5 dB	15.0 deg
6.0 dB	20.8 deg
10 dB	28.7 deg
20 dB	39.7 deg
26 dB	42.3 deg

Table 3.1: Squeezing factor と detune angle.

今, SR mirror の反射率は一定であると考え, OPO の Squeezing を大きくしていく状況を考える. 我々は信号増幅として NLC を用いているため, $s < 1$ である. すなわち, Squeezing を大きくしていくことは $s \rightarrow 0$ の極限を取ることと同値である. このとき, 式 (3.20) 右辺の s を無視することができ, かつ $1/s \rightarrow \infty$ である:

$$s + \frac{1}{s} \simeq \frac{1}{s} \rightarrow \infty.$$

式 (3.20) を満たすためには, $\cos 2\phi \rightarrow 0$ となる ϕ を選ぶ必要がある. したがって,

$$\cos 2\phi \rightarrow 0 \Leftrightarrow 2\phi \rightarrow 90 \text{ degree} \Leftrightarrow \phi \rightarrow 45 \text{ degree}.$$

以上より, 光ばねの共振周波数を高周波帯へ移動させるためには Squeezing factor $s \rightarrow 0$ が要請され, その際に光ばねが消えない条件として, detune phase $\phi \rightarrow 45$ 度が課されるということがわかる.

3.2.4 従来の検出軸における感度限界

非線形光学結晶設置型重力波検出器の感度向上を実現するためには, 従来の検出方法ではなく Homodyne Detection が必要である ($\xi \neq 90 \text{ deg}$) と先行研究 [17] で述べられている. 具体的には, 従来の b_2 軸の検出では雑音の大きさによる限界感度 h_{lim} が存在し, Squeezing factor を上昇させたとしても mechanical resonance の dip の深さはもとの周波数の $\sqrt{2}$ 倍程度の周波数までしか改善されない (図 3.4). 式的な解釈は次のようになる.

2.3 節と同様にして, ノイズスペクトル $S_h(f)$ の分子が最小となる周波数を求めると,

$$\Omega'_{21} = \sqrt{\frac{4\omega_0(I_0/s)}{mc^2(s + 1/s) \tan \phi}}, \quad (3.21)$$

$$\Omega'_{22} = \sqrt{\frac{4\omega_0(I_0/s) \sin 2\phi(\rho + 1/\rho)}{mc^2[4 - (\rho + 1/\rho)(s + 1/s) \cos 2\phi - (\rho - 1/\rho)(s - 1/s)]}}. \quad (3.22)$$

$\rho \rightarrow 1$ かつ $s \rightarrow 1$ の極限では Ω'_{21} , Ω'_{22} , Ω_{OS} は一致する. しかし, 2.3 節で述べたように感度曲線の dip の周波数とは必ずしも一致しない. Homodyne angle $\xi = 90 \text{ deg}$ の際には, 図 2.12 のように $|A_{21}|$ が干渉計の感度を制限する. 式 (3.21)(3.22) から,

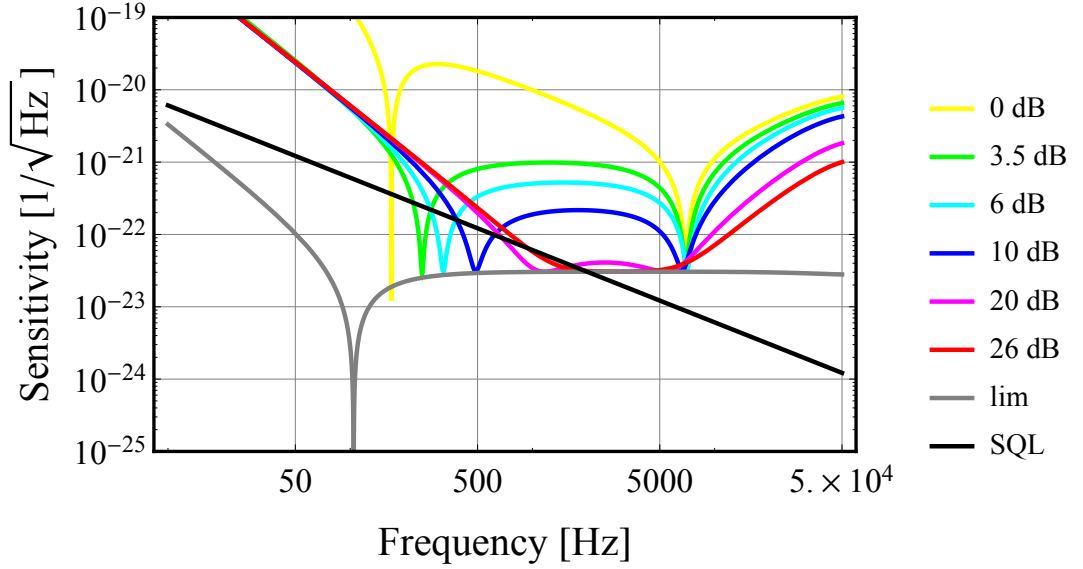


Figure 3.4: 非線形光学結晶を用いた重力波検出器の感度曲線と次世代型重力波検出器の限界感度. $m = 2g$, $\rho = \sqrt{0.99}$ とし, Homodyne angle は 90 deg としている.

$$\begin{aligned} & \Omega_{22}'^2 - \Omega_{21}'^2 \\ &= \frac{4\omega_0(I_0/s)}{mc^2} \frac{2(1 - s\rho)^2 \cos 2\phi}{s[(1 - \rho^2)(s - 1/s) - (1 + \rho^2)(s + 1/s) \cos 2\phi + 4\rho](s + 1/2) \sin \phi} \end{aligned} \quad (3.23)$$

と計算できる. $|A_{21}| = 0$ と $|A_{22}| = 0$ が実数解を持つ範囲では (3.23) は常に正である. したがって $\Omega_{21}' < \Omega_{22}'$ が成り立つ. これは, 図 3.5 のように $|A_{21}|$ が $|A_{22}|$ より低周波数側で dip を持つことを指しており, したがって高周波数帯の感度は $|A_{21}|$ によって限界が定められる. $1 + s^2 \geq 1$ であることから, 式 (3.21) より

$$\Omega_{21}' \leq \sqrt{\frac{4\omega_0 I_0}{mc^2 \tan \phi}} = \sqrt{2} \Omega_{21} \quad (3.24)$$

が得られる. したがって, 結晶を用いた場合の $|A_{21}|$ の dip 周波数は結晶設置前の $\sqrt{2}$ 倍程度にしかない⁴. この $\sqrt{2}$ 倍を超えて Ω_{21}' を高周波数帯にシフトさせても, 図 3.5 のように感度は $|A_{21}|$ で制限され, その値は

$$h_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{|A_{21}|^2}{|H_2|^2}} \quad (3.25)$$

と計算できる. $\xi = 90 \text{ deg}$ の感度曲線を見れば, 実際に h_{lim} を包絡線とするように $\xi = 90 \text{ deg}$ の感度曲線が存在していることがわかる (図 3.4). 以上より, 従来の検出方法では非線形光学効果を十分に運用することができない. このため, Homodyne angle

⁴感度曲線の dip の周波数は $|A_{22}|$ によって決定されるが, $|A_{21}|$ の dip 周波数とのずれから, 設置前の感度に比べるとかなり鈍ってしまっており, 劇的な感度改善は得られない.

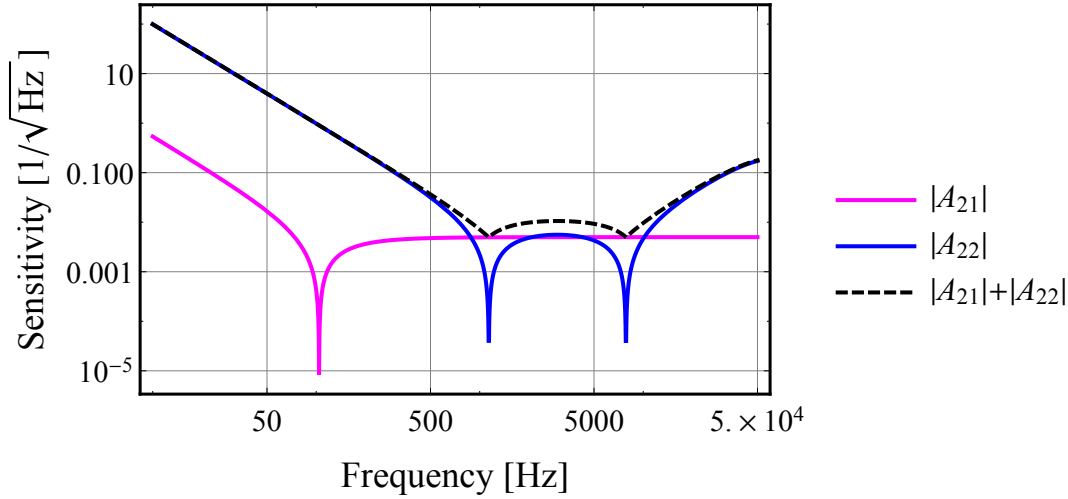


Figure 3.5: 結晶設置後の $|A_{21}|$ と $|A_{22}|$, $|A_{21}| + |A_{22}|$ のグラフ．雑音が最小となる振動数は異なっている． $|A_{21}| = 0$ となる周波数は高々 $\sqrt{2}$ 倍程度しか変化しておらず， $|A_{22}| = 0$ となる周波数で dip が生じるが，その感度は $|A_{21}|$ によって制限されている．

としては $\xi \neq 90 \text{ deg}$ を選ぶ必要があり，ここでは $\xi = 45 \text{ deg}$ としている． $\xi = 45 \text{ deg}$ における各雑音は図 3.6 のようになっており，それぞれの雑音の dip 周波数が一致している．この振る舞いにより， $\xi = 90 \text{ deg}$ のような制限を受けることなく，非線形光学効果の恩恵を受けることが可能となる．

3.3 Input Squeezing SR Michelson 干渉計

3.3.1 Squeezed Input

第 4 章での比較対象である Squeezed Input Michelson 干渉計について述べる．Squeezed Input Michelson 干渉計とは，出力の際に信号雑音比が最適となるよう入射真空場 $\mathbf{a}$ をあらかじめ Squeeze しておく手法である [5]．直感的な感度改善のイメージを図 3.7 に示す．図 3.7 より，検出軸 b_2 で確かに雑音が減少していることがわかる．

Squeeze された入射場を得るためには，Michelson 干渉計の dark port から入射する真空場に Squeezing をかける必要がある．Input Squeezing factor を r , Squeezing angle を λ とすれば，入射場 $\mathbf{a}$ は

$$\mathbf{a} \rightarrow R(\lambda)S(r,0)R(-\lambda)\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda \\ \sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda \\ -\sin \lambda & \cos \lambda \end{pmatrix} \mathbf{a} \quad (3.26)$$

のように置き換えられる [5][10]．したがって Lossless の場合の Input-output relation は，式 (3.12) において

$$\mathbb{A}\mathbf{a} \rightarrow \mathbb{A}R(\lambda)S(r,0)R(-\lambda)\mathbf{a}$$

のように修正すればよい．以上より，Lossless な Input Squeezing SR Michelson 干渉計

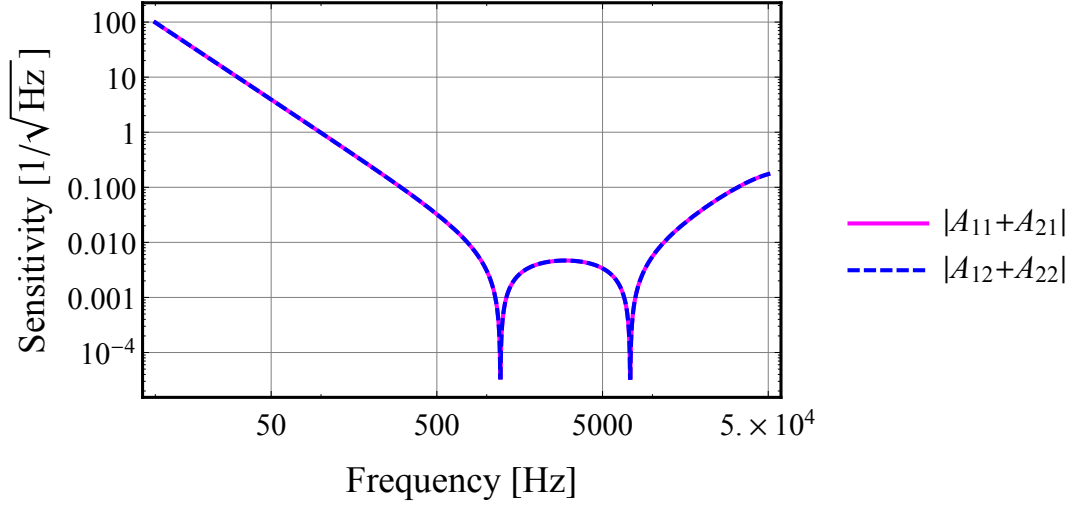


Figure 3.6: $|A_{11} + A_{21}|$ と $|A_{12} + A_{22}|$ のグラフ. $|A_{11} + A_{21}|$ と $|A_{12} + A_{22}|$ は完全に一致しており, 最良感度を与えていることがわかる.

のスペクトルは

$$S_h^\xi(f) = \frac{\mathbf{w} \mathbb{A} R(\lambda) S(2r, 0) R(-\lambda) \mathbb{A}^\dagger \mathbf{w}^T}{\mathbf{w} \mathbb{H} \mathbb{H}^\dagger \mathbf{w}^T}. \quad (3.27)$$

と計算できる. [10] より, Input Squeezing angle λ が

$$R(-\lambda) \mathbb{A}^\dagger \mathbf{w}^T \propto \mathbf{e}_{\text{phase}}$$

を満たすとき, あるいは

$$\tan \lambda = \frac{A_{11} \cos \xi + A_{21} \sin \xi}{A_{12} \cos \xi + A_{22} \sin \xi}$$

であるとき干渉計の感度は最良となり,

$$S_h^\xi(f) = e^{-2r} \frac{\mathbf{w} \mathbb{A} \mathbb{A}^\dagger \mathbf{w}^T}{\mathbf{w} \mathbb{H} \mathbb{H}^\dagger \mathbf{w}^T} \quad (3.28)$$

が得られる. このとき, Input Squeezing angle $\lambda = \lambda_{\text{opt}}$ は周波数依存性を持っており, Michelson 干渉計の場合であれば Variational Readout angle $\xi = \Phi$ の逆符号となる. また, 式 (3.28) より, Input Squeezing を用いない感度曲線と比べ e^{-r} 倍感度が良くなっていることがわかる⁵. この感度改善は, 入射真空場 $\mathbf{a}$ を適切な周波数依存角で Squeeze することによって, 楕円の短軸方向を任意の周波数で検出軸 b_2 に合わせているからだと解釈できる.

3.3.2 感度曲線

前小節で得られたスペクトルをプロットしたものが図 3.8 である. これより Frequency Dependent の λ_{opt} の感度曲線は, 固定の Squeezing angle の感度曲線における最良感度の

⁵感度曲線は $\sqrt{S_h^\xi(f)}$ である.

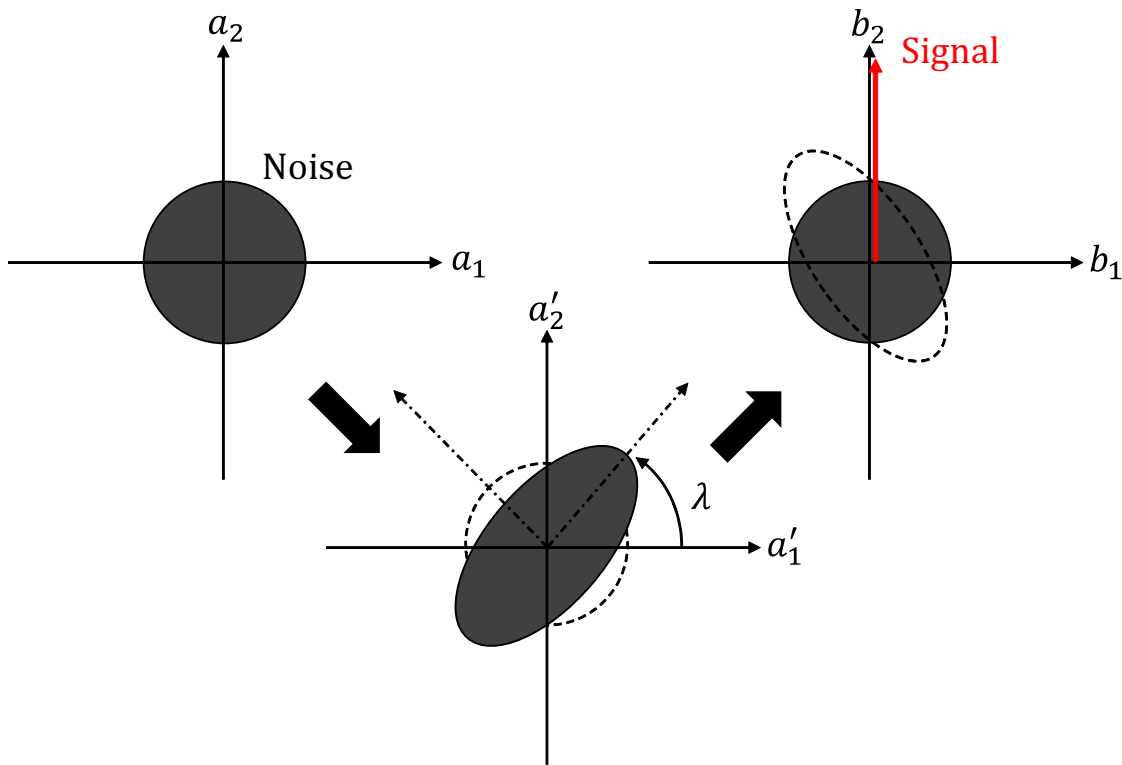


Figure 3.7: 入力 a と Squeezed Input a' , 出力 b の雑音楕円. 簡単のため, Michelson 干渉計に Squeezed Input を用いた場合の雑音楕円を示した. 信号の大きさは変わらないが, 雑音楕円の b_2 軸への射影成分が小さくなり, 信号雑音比が向上していることがわかる.

包絡線であることがわかる. また, この最良感度の深さは Input Squeezing factor に依存しており, Squeezing 強度を上げれば感度も向上する (図 3.9). これは, Squeezing factor を上昇させるほど, 検出軸と同方向の雑音楕円の短軸が小さくなり, 信号雑音比が向上するからである. この全周波数帯で感度を向上させる Input Squeezing SR Michelson 干渉計を本修士論文における比較対象とし, 次節でロスの影響を評価する.

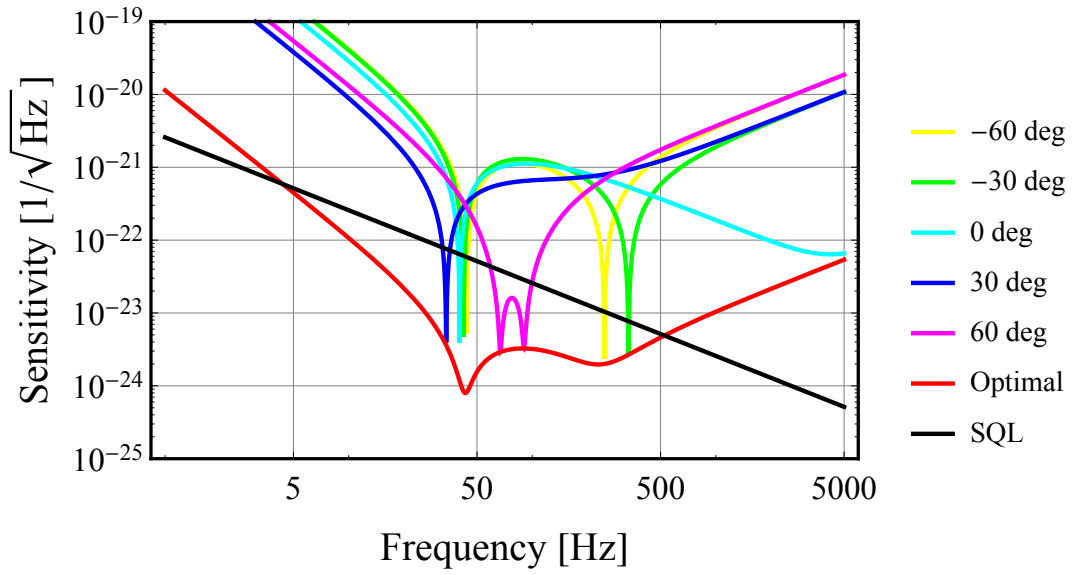


Figure 3.8: Input Squeezing SR Michelson 干渉計の感度曲線. $m = 5.6$ kg, $\rho = \sqrt{0.99}$, $\phi = 0.0055$ rad, Squeezing factor は 26 dB とし, Homodyne angle は 90 deg である.

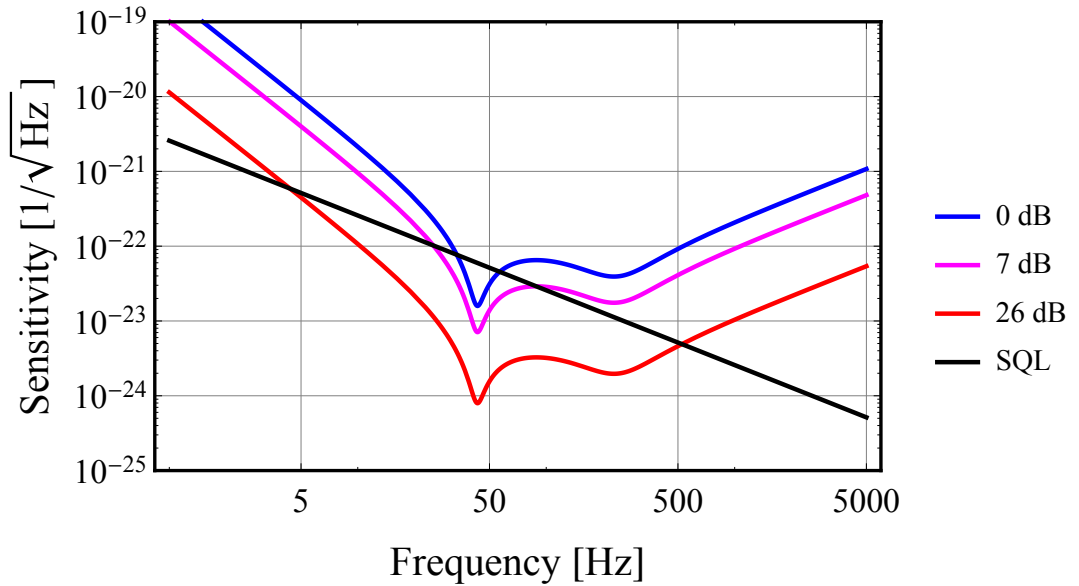


Figure 3.9: Input Squeezing SR Michelson 干渉計の感度曲線. Input Squeezing Angle は周波数依存性を持つ最適角 λ_{opt} であり, Squeezing factor を変更している.

Chapter 4

光学損失の影響

前章では、非線形光学効果を利用した検出器において、実効的な入射レーザーパワーの上昇による光ばねの硬化を確認できた。モチベーションの1つである「高周波数帯で感度の良い干渉計」であることを示すことはできたが、「光学損失に強い干渉計」であるかどうかを確認する必要がある。本章では、損失を含んだ Lossy な干渉計の Input-output relation を計算し、Lossy な Input Squeezing Michelson 干渉計との比較を行う。また、Loss を導入したことによる真空場の特徴的な振る舞いを示す。

4.1 Input-output relation

4.1.1 Michelson 干渉計の Input-output relation

まず光学損失（optical loss）を量子雑音の計算に入れる手法を述べる。ロス真空場 $\mathbf{n}$ の混入については、ポートにおける強度ロスを η として、図 4.1 のように表される：

$$\mathbf{A}_{\text{out}} = \sqrt{1-\eta} \mathbf{A}_{\text{in}} + \sqrt{\eta} \mathbf{n} . \quad (4.1)$$

この式より、量子雑音の計算における光学損失の導入は、新たな雑音源である $\mathbf{n}$ が混入した際に、Lossless 時の真空場 $\mathbf{A}_{\text{in}}$ を $\sqrt{\eta}$ だけ失うものであると解釈できる。本来光学損失は鏡の表面における散乱や吸収が主な原因だが、これを振幅 $\sqrt{\eta}$ のロス真空場として計算に加えることで、光学損失を雑音として評価することが可能となる。

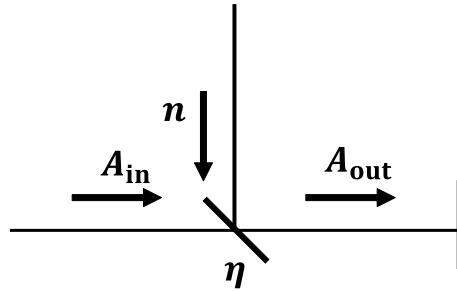


Figure 4.1: ロスの混入.

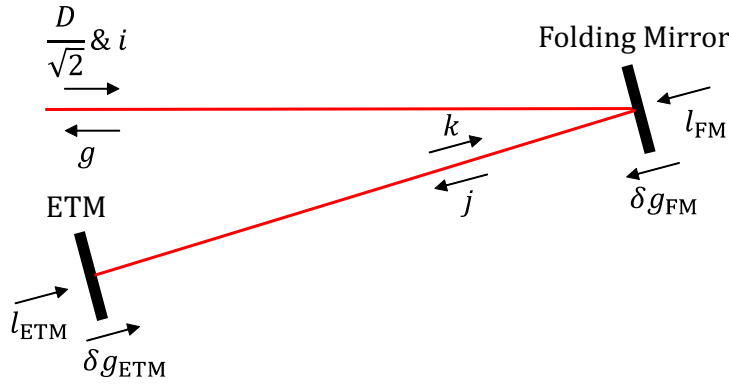


Figure 4.2: Michelson 干渉計の腕部分における Folding mirror, ETM の光学損失真空場 l_{FM} , l_{ETM} の導入.

Beam Splitter

bs からのロスを検討した bs 周りの真空場は、式 (2.29) より

$$i^n = \sqrt{1 - \epsilon_{BS}} \cdot \frac{u + c}{\sqrt{2}} + \sqrt{\epsilon_{BS}} q_{BS}^n \quad (4.2)$$

$$i^e = \sqrt{1 - \epsilon_{BS}} \cdot \frac{u - c}{\sqrt{2}} + \sqrt{\epsilon_{BS}} q_{BS}^e \quad (4.3)$$

$$d = \frac{g^n - g^e}{\sqrt{2}} \quad (4.4)$$

となる¹. また、BS においてキャリア光も損失することを考慮に入れるため、振幅を $D \rightarrow D \times \sqrt{1 - \epsilon_{BS}}$ のように変化させる. 式 (4.2)(4.3) を用いれば、

$$\frac{i^n - i^e}{\sqrt{2}} = \sqrt{1 - \epsilon_{BS}} c + \sqrt{\epsilon_{BS}} n. \quad (4.5)$$

ただし、

$$n = \frac{q_{BS}^n - q_{BS}^e}{\sqrt{2}}$$

と置いた.

Folding mirror と ETM

次に、Michelson 干渉計の腕部分における光学損失を計算する. Michelson 干渉計で光学損失が混入するポートは Folding mirror, ETM の 2 つである². Folding mirror, ETM におけるロスは、これまで完全反射としてきた鏡の反射率を変更することで導入が可

¹慣習に従って dark port から入射する際にロスを混入させているため、Michelson から出力される (4.4) では式の形は変化しない.

²腕を伝播する際の散乱も存在するが、これらのロスは Folding mirror や ETM のロス真空場と同様に振る舞うため、Folding mirror と ETM に押し付けることができる.

能となる．具体的には，(振幅反射率，振幅透過率) が $(1, 0)$ であった Folding mirror, ETM をそれぞれ

$$\text{Folding mirror } (\sqrt{R}, \sqrt{T}) \text{ , ETM } (\sqrt{\tilde{R}}, \sqrt{\tilde{T}})$$

と変更すればよい．これによって，鏡で完全反射していたはずの真空場は鏡を透過して失われ，代わりに鏡の裏側から新たな雑音源であるロス真空場 $\mathbf{l}_{\text{FM}}$, $\mathbf{l}_{\text{ETM}}$ が混入する (図 4.2)．腕に光学損失が損失する場合の場の連立方程式は，式 (2.33) を修正して

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sqrt{R} \mathbf{i} e^{i\frac{\beta}{2}} + \sqrt{T} \mathbf{l}_{\text{FM}} + \delta \mathbf{g}_{\text{FM}} \text{ ,} \\ \mathbf{k} e^{-i\frac{\beta}{2}} &= \sqrt{\tilde{R}} \mathbf{j} e^{i\frac{\beta}{2}} + \sqrt{\tilde{T}} \mathbf{l}_{\text{ETM}} + \delta \mathbf{g}_{\text{ETM}} \text{ .} \\ \tilde{\mathbf{g}} e^{-i\frac{\beta}{2}} &= \mathbf{k} + \delta \mathbf{g}_{\text{FM}} \text{ .} \end{aligned} \quad (4.6)$$

2.2 節と同様にして，(4.6) を $\mathbf{g}$ について解くと

$$\mathbf{g} = \sqrt{R\tilde{R}} \mathbf{i} e^{2i\beta} + \sqrt{T} \mathbf{l}_{\text{FM}} e^{i\beta} + \sqrt{\tilde{T}} \mathbf{l}_{\text{ETM}} e^{i\beta} + \left[(1 + \sqrt{\tilde{R}}) \delta \mathbf{g}_{\text{FM}} + \delta \mathbf{g}_{\text{ETM}} \right] e^{i\beta} \text{ .} \quad (4.7)$$

ここで，

$$1 + \sqrt{\tilde{R}} \sim 1 + \left(1 - \frac{\tilde{T}}{2} \right) = 2 \left(1 - \frac{\tilde{T}}{4} \right)$$

と近似し，式 (2.32) と共に (4.7) に代入すれば

$$\mathbf{g} \simeq \sqrt{R\tilde{R}} \mathbf{i} e^{2i\beta} + \sqrt{T} \mathbf{l}_{\text{FM}} e^{i\beta} + \sqrt{\tilde{T}} \mathbf{l}_{\text{ETM}} e^{i\beta} + \frac{2\omega_0 D_*}{c} \left[2 \left(1 - \frac{\tilde{T}}{4} \right) X_{\text{FM}} + X_{\text{ETM}} \right] e^{i\beta} \quad (4.8)$$

が得られる．ただし

$$D_* = D \sqrt{1 - \epsilon_{\text{BS}}}$$

と置いた．

輻射圧ゆらぎ

以下，式 (4.8) における $\delta \mathbf{g}$ の具体形を求める．Folding mirror と ETM における運動方程式はそれぞれ (2.37)(2.38) で表される．ここで，Beam Splitter のロスによって I_0 が，腕のロス真空場の導入によって δf_{rad} , $\delta f'_{\text{rad}}$ が変化する． I_0 に関しては，入射レーザーの古典振幅 D が $D \sqrt{1 - \epsilon_{\text{BS}}}$ へと変化的ことから

$$I_{0*} = \hbar \omega_0 \times D^2 (1 - \epsilon_{\text{BS}}) = I_0 (1 - \epsilon_{\text{BS}}) \quad (4.9)$$

のように書き換えられる．輻射圧ゆらぎに関しては，Folding mirror の運動方程式より

$$\begin{aligned} -m_1 \Omega^2 X_{\text{FM}} &= \frac{2\hbar \omega_0 D_*}{c} \left(i_1 e^{i\beta/2} + \sqrt{\tilde{R}} j_1 e^{i\beta} + \sqrt{\tilde{T}} p_1 e^{i\beta/2} \right) \\ &= \frac{2\hbar \omega_0 D_*}{c} \left[i_1 e^{i\beta/2} + \sqrt{\tilde{R}} (\sqrt{R} i_1 e^{i\beta/2} + \sqrt{T} l_1) e^{i\beta} + \sqrt{\tilde{T}} p_1 e^{i\beta/2} \right] \\ &= \frac{2\hbar \omega_0 D_*}{c} \left[\sqrt{R\tilde{R}} \left(\frac{i_1}{\sqrt{R\tilde{R}} e^{i\beta/2}} + i_1 e^{i\beta/2} \right) + \sqrt{\tilde{R}T} l_1 + \sqrt{\tilde{T}} p_1 e^{-i\beta/2} \right] e^{i\beta} \\ &\simeq \frac{2\hbar \omega_0 D_*}{c} \left(2\sqrt{R\tilde{R}} i_1 + \sqrt{T} l_1 + \sqrt{\tilde{T}} p_1 \right) e^{i\beta} \end{aligned}$$

のように計算できる．ここで，第三行から第四行へは $\sqrt{R\tilde{R}} \sim 1$, $e^{i\beta/2} \sim 1$ を用い，またロスの1次までとっている．重力波の作用も組み合わせて上式を書き換えると

$$X_{\text{FM}} \simeq -\frac{2\hbar\omega_0 D_*}{m_1 c \Omega^2} \left(2\sqrt{R\tilde{R}}i_1 + \sqrt{T}l_1 + \sqrt{\tilde{T}}p_1 \right) e^{i\beta} + \frac{Lh}{4}. \quad (4.10)$$

ETM に関しても同様にして

$$X_{\text{ETM}} \simeq -\frac{2\hbar\omega_0 D_*}{m_2 c \Omega^2} \left(\sqrt{R}i_1 + \sqrt{T}l_1 \right) e^{i\beta} \quad (4.11)$$

が得られる．式 (4.10)(4.11) を (4.8) に代入すれば，腕の output である $\mathbf{g}$ について

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \simeq & \sqrt{R\tilde{R}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_{\text{vac}} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{i} e^{2i\beta} + \sqrt{T} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_{\text{FM}} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{l}_{\text{FM}} e^{i\beta} \\ & + \sqrt{\tilde{T}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_{\text{ETM}} & 1 \end{pmatrix} \mathbf{l}_{\text{ETM}} e^{i\beta} + \eta_{\text{me}} \frac{\omega_0 L D_*}{c} \left(1 - \frac{\tilde{T}}{4} \right) h \mathbf{e}_{\text{phase}} e^{i\beta} \end{aligned} \quad (4.12)$$

が得られる．ただし，各 Coupling Constant は

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\text{vac}} &= \frac{16\omega_0 I_{0*}}{m_1 c^2 \Omega^2} \left(1 - \frac{\tilde{T}}{4} \right) + \frac{4\omega_0 I_{0*}}{m_2 c^2 \Omega^2}, \\ \mathcal{K}_{\text{FM}} &= \frac{8\omega_0 I_{0*}}{m_1 c^2 \Omega^2} \left(1 - \frac{\tilde{T}}{4} \right) + \frac{4\omega_0 I_{0*}}{m_2 c^2 \Omega^2}, \\ \mathcal{K}_{\text{ETM}} &= \frac{8\omega_0 I_{0*}}{m_1 c^2 \Omega^2} \left(1 - \frac{\tilde{T}}{4} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

と定義しており，真空場，Folding mirror から混入するロス，ETM から混入するロスの Ponderomotive Squeezing を特徴づけるパラメータとなっている．2.2 節と同様にし，Folding mirror より ETM が十分に軽い系 ($m_1 \gg m_2$) を設定すると，真空場と Folding mirror の Coupling Constant は

$$\mathcal{K}_{\text{vac}} \simeq \frac{4\omega_0 I_{0*}}{m_2 c^2 \Omega^2} \simeq \mathcal{K}_{\text{FM}} \equiv \mathcal{K}_* \quad (4.14)$$

と近似できる．Michelson 干渉計の Arm に Fabry-Perot Cavity を持つ重力波検出器では， $\mathcal{K}_*$ が Arm 内のロスから受ける影響は非常に大きい．これは，腕を何度を往復することでロスの影響も増幅し，腕内のパワーが減少するからである．しかし，Arm Cavity を持たない GEO 型の重力波検出器では Arm ロスからの影響を然程受けず，特に $m_1 \gg m_2$ の系では Beam Splitter からのロスのみによって輻射圧が変動する．

ARM

Folding mirror と ETM のロス真空場が受ける Ponderomotive Squeezing の振る舞いには， $\mathcal{K}_*$ と $\mathcal{K}_{\text{ETM}}$ だけの差があり，Michelson 干渉計や Broadband の SR Michelson 干

渉計ではこれらを区別して考える必要がある．しかし，光ばねを用いた detuned SR Michelson 干渉計ではこれらの光学損失の振る舞いは一致する．SR Michelson 干渉計における場の連立方程式 (2.77) に従い，output port $\mathbf{b}$ に含まれるロス真空場成分を求めると，

$$\mathbf{b}_{\text{FM}} = \tau\sqrt{T} \times R[\mathbb{I} - \rho e^{2i\beta} \mathcal{P}_* R^2]^{-1} \mathcal{P}_* \mathbf{l}_{\text{FM}} e^{i\beta}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{b}_{\text{ETM}} = \tau\sqrt{\tilde{T}} \times R[\mathbb{I} - \rho e^{2i\beta} \mathcal{P}_* R^2]^{-1} \mathcal{P}_{\text{ETM}} \mathbf{l}_{\text{ETM}} e^{i\beta} \quad (4.16)$$

が得られる．ここで R は回転行列であり， $\mathcal{P}_*$ ， $\mathcal{P}_{\text{ETM}}$ はそれぞれ

$$\mathcal{P}_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_* & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{P}_{\text{ETM}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_{\text{ETM}} & 1 \end{pmatrix}$$

と置いた．光ばねの共振周波数を特徴づける factor は $[\mathbb{I} - \rho e^{2i\beta} \mathcal{P}_* R^2]^{-1}$ であるため³，Ponderomotive Squeezing 行列 $\mathcal{P}_*$ ， $\mathcal{P}_{\text{ETM}}$ の差は，光ばねが存在する場合非常に小さくなる．実際に，(4.15)(4.16) から求めた雑音スペクトルを求めれば，その振る舞いは一致することが確かめられる．

これをモチベーションとして，Folding mirror と ETM の光学損失真空場を統合することを考える．今，Folding mirror と ETM の光学損失の大きさは等しいと仮定する．[5] より，Michelson 干渉計の腕を伝播する際の損失の強度 $\mathcal{L}$ は ETM の透過率と等しく，

$$\tilde{T} = \mathcal{L} \simeq 20 \text{ [ppm]} = 20 \times 10^{-6}$$

程度である．これをもとに，Michelson 干渉計における光学損失強度 ϵ_{arm} を

$$\epsilon_{\text{arm}} = \epsilon_{\text{FM}} + \epsilon_{\text{ETM}} = T + \tilde{T} \simeq 40 \text{ [ppm]} \quad (4.17)$$

と定義する．Folding mirror, ETM の Coupling constant の差が光ばねの条件下では非常に小さくなることと式 (4.17) より，Arm の出力 $\mathbf{g}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \simeq \sqrt{R\tilde{R}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_* & 1 \end{pmatrix} i e^{2i\beta} + \sqrt{\epsilon_{\text{arm}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_* & 1 \end{pmatrix} \mathbf{q}_{\text{arm}} e^{i\beta} \\ + \eta_{\text{me}} \frac{\omega_0 L D_*}{c} \left(1 - \frac{\tilde{T}}{4} \right) h \mathbf{e}_{\text{phase}} e^{i\beta} \end{aligned} \quad (4.18)$$

と書き直すことができる．ここで，腕で混入するロス $\mathbf{q}_{\text{arm}}$ を

$$\mathbf{q}_{\text{arm}} = \frac{\mathbf{l}_{\text{FM}} + \mathbf{l}_{\text{ETM}}}{\sqrt{2}}$$

と再定義した．

³この行列式 = 0 の周波数が光ばねの共振周波数である．

Michelson

(4.4)(4.5)(4.18) より, Michelson 干渉計からの出力 $\mathbf{d}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = & \sqrt{(1 - \epsilon_{\text{BS}})R\tilde{R}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_* & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} e^{2i\beta_*} + \frac{\sqrt{2\mathcal{K}_*}}{h_{\text{SQL}}} \left(1 - \frac{\tilde{T}}{4}\right) h \mathbf{e}_{\text{phase}} e^{i\beta} \\ & + \sqrt{\epsilon_{\text{BS}}R\tilde{R}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_* & 1 \end{pmatrix} \mathbf{n} e^{2i\beta} + \sqrt{\epsilon_{\text{arm}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{K}_* & 1 \end{pmatrix} \mathbf{l} e^{i\beta}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

$T \times \tilde{T} \ll 1$ として, 式 (4.19) を各光学損失 ϵ_{BS} , ϵ_{arm} で記述すると

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \simeq & \sqrt{(1 - \epsilon_{\text{BS}})(1 - \epsilon_{\text{arm}})} \mathcal{P}_* \mathbf{c} e^{2i\beta_* + \alpha_*} \left(1 - \frac{\epsilon_{\text{arm}}}{8}\right) h \mathbf{e}_{\text{phase}} e^{i\beta} \\ & + \sqrt{\epsilon_{\text{BS}}} \mathcal{P}_* \mathbf{n} e^{2i\beta} + \sqrt{\epsilon_{\text{arm}}} \mathcal{P}_* \mathbf{l} e^{i\beta}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

ただし,

$$\alpha_* = \frac{\sqrt{2\mathcal{K}_*}}{h_{\text{SQL}}} \quad (4.21)$$

とおいた. 式 (4.20) より, 入射真空場 $\mathbf{c}$ は Beam Splitter と Arm で, 信号 h は Arm で損失の影響を受けていることが読み取れる. また, Beam Splitter と Arm で混入したロス $\mathbf{n}$, $\mathbf{l}$ は入射真空場 $\mathbf{c}$ と同様の変換 $\mathcal{P}_*$ に従っており, この雑音楕円の面積はそれぞれの入射強度に等しいことがわかる.

4.1.2 NLC を含めた Input-output relation

非線形光学結晶設置型重力波検出器全体の光学損失を計算する. SR mirror, 非線形光学結晶, Photodetector における光学損失強度を ϵ_{SRM} , ϵ_{NLC} , ϵ_{PD} , ロス真空場を $\mathbf{v}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{u}$ とすると, 場の連立方程式は

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \sqrt{1 - \epsilon_{\text{PD}}}(-\rho \mathbf{a} + \tau \mathbf{f}) + \sqrt{\epsilon_{\text{PD}}} \mathbf{u}, \\ \mathbf{e} &= \sqrt{1 - \epsilon_{\text{SRM}}}(\rho \mathbf{f} + \tau \mathbf{a}) + \sqrt{\epsilon_{\text{SRM}}} \mathbf{v}, \\ \mathbf{f} &= \sqrt{1 - \epsilon_{\text{NLC}}}R(\phi)S(s)\mathbf{d} + \sqrt{\epsilon_{\text{NLC}}}R(\phi)\mathbf{q}, \\ \mathbf{c} &= R(\phi)\mathbf{e}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = & \sqrt{(1 - \epsilon_{\text{BS}})(1 - \epsilon_{\text{arm}})} \mathcal{P}_* \mathbf{c} e^{2i\beta_* + \alpha_*} \left(1 - \frac{\epsilon_{\text{arm}}}{8}\right) h \mathbf{e}_{\text{phase}} e^{i\beta} \\ & + \sqrt{\epsilon_{\text{BS}}} \mathcal{P}_* \mathbf{n} e^{2i\beta} + \sqrt{\epsilon_{\text{arm}}} \mathcal{P}_* \mathbf{l} e^{i\beta}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

となる.

$$\begin{aligned} \vec{\text{sig}} &= \alpha_* \left(1 - \frac{\epsilon_{\text{arm}}}{8}\right) h \mathbf{e}_{\text{phase}} e^{i\beta}, \\ \vec{\text{loss}} &= \sqrt{\epsilon_{\text{BS}}} \mathcal{P}_* \mathbf{n} e^{2i\beta} + \sqrt{\epsilon_{\text{arm}}} \mathcal{P}_* \mathbf{l} e^{i\beta}, \\ \mathcal{P}' &= \sqrt{(1 - \epsilon_{\text{BS}})(1 - \epsilon_{\text{arm}})} \mathcal{P}_* \end{aligned}$$

と置くと, $\mathbf{d}$ は

$$\mathbf{d} = \mathcal{P}' \mathbf{c} e^{2i\beta} + \overrightarrow{\text{sig}} + \overrightarrow{\text{loss}}$$

と書き直すことができる. これに加えて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{NLC}} &= \sqrt{\epsilon_{\text{NLC}}} R \mathbf{q} , \\ \overrightarrow{\text{SRM}} &= \sqrt{\epsilon_{\text{SRM}}} R S' \mathcal{P}' R \mathbf{v} , \\ S' &= \sqrt{1 - \epsilon_{\text{NLC}}} S \end{aligned}$$

と置き, 連立方程式 (4.22) を解く. 連立方程式 (4.22) の第一式に注目すると, $\mathbf{f}$ を消去できれば $a - b$ の Input-output relation を得られることがわかる.

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= R S' \mathbf{d} + \overrightarrow{\text{NLC}} \\ &= R S' (\mathcal{P}' \mathbf{c} e^{2i\beta} + \overrightarrow{\text{sig}} + \overrightarrow{\text{loss}}) + \overrightarrow{\text{NLC}} \\ &= R S' \mathcal{P}' R e^{2i\beta} + R S' (\overrightarrow{\text{sig}} + \overrightarrow{\text{loss}}) + \overrightarrow{\text{NLC}} \\ &= R S' \mathcal{P} R \left\{ \sqrt{1 - \epsilon_{\text{SRM}}} (\rho \mathbf{f} + \tau \mathbf{a}) + \sqrt{\epsilon_{\text{SRM}}} \mathbf{v} \right\} e^{2i\beta} + R S' (\overrightarrow{\text{sig}} + \overrightarrow{\text{loss}}) + \overrightarrow{\text{NLC}} \\ &= \sqrt{1 - \epsilon_{\text{SRM}}} \rho R S' \mathcal{P}' R \mathbf{f} e^{2i\beta} + \sqrt{1 - \epsilon_{\text{SRM}}} \tau R S' \mathcal{P}' R \mathbf{a} e^{2i\beta} \\ &\quad + R S' (\overrightarrow{\text{sig}} + \overrightarrow{\text{loss}}) + \overrightarrow{\text{NLC}} + \overrightarrow{\text{SRM}} \end{aligned}$$

より, $\mathbf{f}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= [\mathbb{I} - \sqrt{1 - \epsilon_{\text{SRM}}} \rho e^{2i\beta} R S' \mathcal{P}' R]^{-1} \\ &\quad \times \left\{ \sqrt{1 - \epsilon_{\text{SRM}}} \tau R S' \mathcal{P}' R \mathbf{a} e^{2i\beta} + R S' (\overrightarrow{\text{sig}} + \overrightarrow{\text{loss}}) + \overrightarrow{\text{NLC}} + \overrightarrow{\text{SRM}} \right\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

と求められる. ここで,

$$\sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} = \sqrt{(1 - \epsilon_{\text{SRM}})(1 - \epsilon_{\text{NLC}})(1 - \epsilon_{\text{BS}})(1 - \epsilon_{\text{arm}})} \quad (4.24)$$

とし,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{M}}{M} &= [\mathbb{I} - \sqrt{1 - \epsilon_{\text{SRM}}} \rho e^{2i\beta} R S' \mathcal{P}' R]^{-1} \\ &= [\mathbb{I} - \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \rho e^{2i\beta} R S \mathcal{P}_* R]^{-1} \end{aligned} \quad (4.25)$$

と置く. ただし, M は

$$M = \det [\mathbb{I} - \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \rho e^{2i\beta} R S \mathcal{P}_* R]$$

であり、光ばねの特性を表すパラメータである⁴。光ばね行列 $\mathbb{M}$ の成分と行列式 M の具体形を求めると、

$$\begin{aligned} M_{11} &= s - \rho e^{2i\beta} \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \left(\frac{1+s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}_*}{2} \sin 2\phi + \frac{1-s^2}{2} \right), \\ M_{12} &= -\rho e^{2i\beta} \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \left(\frac{1+s^2}{2} \sin 2\phi + \mathcal{K}_* \sin^2 \phi \right), \\ M_{21} &= \rho e^{2i\beta} \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \left(\frac{1+s^2}{2} \sin 2\phi - \mathcal{K}_* \cos^2 \phi \right), \\ M_{22} &= s - \rho e^{2i\beta} \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \left(\frac{1+s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}_*}{2} \sin 2\phi - \frac{1-s^2}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$M = s + s\rho^2 e^{4i\beta} \epsilon_{\text{SRMI}} - 2\rho e^{2i\beta} \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \left(\frac{1+s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}_*}{2} \sin 2\phi \right). \quad (4.27)$$

M , $\mathbb{M}$ の表式を用いて、連立方程式 (4.22) の第一式に $\mathbf{f}$ を代入すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \sqrt{1 - \epsilon_{\text{PD}}} \left[-\rho \mathbf{a} + \frac{\tau}{M} \mathbb{M} \{ \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \tau R S \mathcal{P}_* R \mathbf{a} e^{2i\beta} \right. \\ \left. + \sqrt{1 - \epsilon_{\text{NLC}}} R S (\vec{\text{sig}} + \vec{\text{loss}}) + \vec{\text{NLC}} + \vec{\text{SRM}} \} \right] + \sqrt{\epsilon_{\text{PD}}} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

ここで、 $\mathbb{A}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{V}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{U}$ をそれぞれ $\mathbf{a}$, $\mathbf{h}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{u}$ の伝達関数行列とすれば、式 (4.28) は

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \frac{1}{M} (\mathbb{A} \mathbf{a} e^{2i\beta} + \mathbb{H} \mathbf{h} e^{i\beta} + \mathbb{N} \mathbf{n} e^{2i\beta} \\ + \mathbb{L} \mathbf{l} e^{i\beta} + \mathbb{V} \mathbf{v} + \mathbb{Q} \mathbf{q} + \mathbb{U} \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.29)$$

のように書き直すことができるはずである。 $\mathbf{b}$ に含まれる $\mathbf{a}$ を計算すると、

$$\mathbf{b}^a = \frac{1}{M} \sqrt{1 - \epsilon_{\text{PD}}} [-\rho M \mathbb{I} e^{-2i\beta} + \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \tau^2 \mathbb{M} R S \mathcal{P}_* R] \mathbf{a} e^{2i\beta}, \quad (4.30)$$

$$\therefore \mathbb{A} = \sqrt{1 - \epsilon_{\text{PD}}} [-\rho M \mathbb{I} e^{-2i\beta} + \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \tau^2 \mathbb{M} R S \mathcal{P}_* R]. \quad (4.31)$$

同様にして各伝達関数行列は

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \sqrt{(1 - \epsilon_{\text{PD}})(1 - \epsilon_{\text{NLC}})} \left(1 - \frac{\epsilon_{\text{arm}}}{8} \right) \tau \alpha_* \mathbb{M} R S, \\ \mathbb{N} &= \sqrt{(1 - \epsilon_{\text{PD}})(1 - \epsilon_{\text{NLC}}) \epsilon_{\text{BS}}} \tau \mathbb{M} R S \mathcal{P}_*, \\ \mathbb{L} &= \sqrt{(1 - \epsilon_{\text{PD}})(1 - \epsilon_{\text{NLC}}) \epsilon_{\text{arm}}} \tau \mathbb{M} R S \mathcal{P}_*, \\ \mathbb{V} &= \sqrt{\epsilon_{\text{SRM}}(1 - \epsilon_{\text{PD}})(1 - \epsilon_{\text{NLC}})(1 - \epsilon_{\text{arm}})(1 - \epsilon_{\text{BS}})} \tau \mathbb{M} R S \mathcal{P}_* R, \\ \mathbb{Q} &= \sqrt{\epsilon_{\text{NLC}}(1 - \epsilon_{\text{PD}})} \tau \mathbb{M} R, \\ \mathbb{U} &= \sqrt{\epsilon_{\text{PD}}} M \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

⁴分子分母に s をかけておく。

各伝達関数行列の式の形から、各真空場がどのような作用を受けて出力されたのかを知ることができる。Beam Splitter のロス $\mathbf{n}$ を例に考える。N に関して、真空場はまず Beam Splitter において振幅 $\sqrt{\epsilon_{BS}}$ で混入する。Michelson 干渉計を伝播した真空場は Ponderomotive Squeezing の影響 $\mathcal{P}_*$ を受け、非線形光学結晶を通過する ($\sqrt{1 - \epsilon_{NLC}}S$)。これが SR 共振器を伝播して R だけ回転した後、SR 共振器内を往復する (M)⁵。反射後に受ける作用は

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \epsilon_{SRM}}\rho &\rightarrow R \rightarrow \sqrt{1 - \epsilon_{BS}} \\ &\rightarrow \sqrt{1 - \epsilon_{arm}}\mathcal{P}_* \rightarrow \sqrt{1 - \epsilon_{NLC}}S \rightarrow R \rightarrow \dots \end{aligned}$$

であり、これらは光ばね行列 M に含まれている。以上の作用を受けたロス真空場 $\mathbf{n}$ は SR 共振器から透過率 τ で出力され、最終的に検出効率が $\sqrt{1 - \epsilon_{PD}}$ の光検出器によって検出される。各真空場が受ける作用には類似性があり、例えば $\mathbf{a}$ の透過成分と SR mirror のロス $\mathbf{v}$ 、Beam Splitter のロス $\mathbf{n}$ と arm のロス $\mathbf{l}$ は式の形がよく似ていることがわかる。

4.1.3 結果

$a - b$ の Input-output relation は

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \frac{1}{M} & \left(\mathbb{A}\mathbf{a}e^{2i\beta} + \mathbb{H}h e^{i\beta} + \mathbb{N}\mathbf{n}e^{2i\beta} \right. \\ & \left. + \mathbb{L}\mathbf{l}e^{i\beta} + \mathbb{V}\mathbf{v} + \mathbb{Q}\mathbf{q} + \mathbb{U}\mathbf{u} \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

で与えられる。各伝達関数行列の具体形を求めるには式 (4.31)(4.32) を計算すればよい。入射真空場の伝達関数行列 $\mathbb{A}$ は

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{1 - \epsilon_{PD}} \left[(1 + \rho^2)\sqrt{\epsilon_{SRMI}} \left(\frac{1 + s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}_*}{2} \sin 2\phi \right) \right. \\ &\quad \left. - s\rho(e^{-2i\beta} + \epsilon_{SRMI}e^{2i\beta}) - \frac{1 - s^2}{2}\tau^2\sqrt{\epsilon_{SRMI}} \right], \\ A_{12} &= -\sqrt{\epsilon_{SRMI}(1 - \epsilon_{PD})}\tau^2 \left(\frac{1 + s^2}{2} \sin 2\phi + \mathcal{K}_* \sin^2 \phi \right), \\ A_{21} &= \sqrt{\epsilon_{SRMI}(1 - \epsilon_{PD})}\tau^2 \left(\frac{1 + s^2}{2} \sin 2\phi - \mathcal{K}_* \cos^2 \phi \right), \\ A_{22} &= \sqrt{1 - \epsilon_{PD}} \left[(1 + \rho^2)\sqrt{\epsilon_{SRMI}} \left(\frac{1 + s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}}{2} \sin 2\phi \right) \right. \\ &\quad \left. - s\rho(e^{-2i\beta} + \epsilon_{SRMI}e^{2i\beta}) + \frac{1 - s^2}{2}\tau^2\sqrt{\epsilon_{SRMI}} \right] \end{aligned}$$

である。各々の成分は、全てのロスの値をゼロにすれば Lossless の結果に一致している。信号 h の係数ベクトルは

$$\begin{aligned} H_1 &= -\sqrt{(1 - \epsilon_{PD})(1 - \epsilon_{NLC})} \left(1 - \frac{\epsilon_{arm}}{8} \right) \tau\alpha_* (1 + s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta}) \sin \phi, \\ H_2 &= \sqrt{(1 - \epsilon_{PD})(1 - \epsilon_{NLC})} \left(1 - \frac{\epsilon_{arm}}{8} \right) \tau\alpha_* (1 - s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta}) \cos \phi \end{aligned}$$

⁵無限等比級数の和の式の分母に対応している。

であり, こちらも $\epsilon_i = 0$ とすれば, Lossless の結果に一致する. 各光学損失真空場の伝達関数行列は

$$\begin{aligned} N_{11} &= \sqrt{\epsilon_{BS}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})}\tau\{s(s-\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\cos\phi+\mathcal{K}_*\sin\phi\}, \\ N_{12} &= -\sqrt{\epsilon_{BS}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})}\tau(1+s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\sin\phi, \\ N_{21} &= \sqrt{\epsilon_{BS}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})}\tau\{s(s+\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\sin\phi-\mathcal{K}_*\cos\phi\}, \\ N_{22} &= \sqrt{\epsilon_{BS}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})}\tau(1-s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\cos\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{11} &= \sqrt{\epsilon_{arm}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})}\tau\{s(s-\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\cos\phi+\mathcal{K}_*\sin\phi\}, \\ L_{12} &= -\sqrt{\epsilon_{arm}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})}\tau(1+s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\sin\phi, \\ L_{21} &= \sqrt{\epsilon_{arm}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})}\tau\{s(s+\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\sin\phi-\mathcal{K}_*\cos\phi\}, \\ L_{22} &= \sqrt{\epsilon_{arm}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})}\tau(1-s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\cos\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{11} &= \sqrt{\epsilon_{SRM}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})(1-\epsilon_{arm})(1-\epsilon_{BS})}\tau \\ &\quad \times \left(\frac{1+s^2}{2}\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}_*}{2}\sin 2\phi - s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta} - \frac{1-s^2}{2} \right), \\ V_{12} &= -\sqrt{\epsilon_{SRM}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})(1-\epsilon_{arm})(1-\epsilon_{BS})}\tau \left(\frac{1+s^2}{2}\sin 2\phi + \mathcal{K}_*\sin^2\phi \right), \\ V_{21} &= \sqrt{\epsilon_{SRM}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})(1-\epsilon_{arm})(1-\epsilon_{BS})}\tau \left(\frac{1+s^2}{2}\sin 2\phi - \mathcal{K}_*\cos^2\phi \right), \\ V_{22} &= \sqrt{\epsilon_{SRM}(1-\epsilon_{PD})(1-\epsilon_{NLC})(1-\epsilon_{arm})(1-\epsilon_{BS})}\tau \\ &\quad \times \left(\frac{1+s^2}{2}\cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}_*}{2}\sin 2\phi - s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta} + \frac{1-s^2}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \sqrt{\epsilon_{NLC}(1-\epsilon_{PD})}\tau \left[(s-\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\cos\phi - \rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta}\mathcal{K}_*\sin\phi \right], \\ Q_{12} &= -\sqrt{\epsilon_{NLC}(1-\epsilon_{PD})}s\tau(1+s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\sin\phi, \\ Q_{21} &= \sqrt{\epsilon_{NLC}(1-\epsilon_{PD})}\tau \left[(s+\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\sin\phi - \rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta}\mathcal{K}_*\cos\phi \right], \\ Q_{22} &= \sqrt{\epsilon_{NLC}(1-\epsilon_{PD})}s\tau(1-s\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}e^{2i\beta})\cos\phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{11} &= \sqrt{\epsilon_{PD}}M = U_{22}, \\ U_{12} &= 0 = U_{21} \end{aligned}$$

と計算できる. 光ばねの周波数を決定する M に関しては

$$M = s + s\rho^2 e^{4i\beta} \epsilon_{SRMI} - 2\rho e^{2i\beta} \sqrt{\epsilon_{SRMI}} \left(\frac{1+s^2}{2} \cos 2\phi + \frac{\mathcal{K}_*}{2} \sin 2\phi \right) \quad (4.34)$$

であり, こちらも Lossless の場合には式 (3.13) と一致する. $\beta \ll 1$, $M = 0$ として光ばねの共振周波数を求めれば

$$\Omega_{OS} \simeq \sqrt{\frac{4\omega_0(I_{0*}/s)\sin 2\phi}{mc^2} \left\{ \left(\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}} + \frac{1}{\rho\sqrt{\epsilon_{SRMI}}} \right) - \left(s + \frac{1}{s} \right) \cos 2\phi \right\}^{-1}}. \quad (4.35)$$

これより光ばねの共振周波数は、光検出器を除いた SR Michelson 干渉計全体のロスの影響を受けることがわかる。具体的には、Lossless における式 (3.17) で $\rho \rightarrow \rho\sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}}$ に変更しているだけであることがわかる。 $\sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} < 1$ より、round-trip におけるロス ϵ_{SRMI} によって実効的な反射率が減少してしまっている。これは、光ばねの担い手である Sideband が各ロスのポートで失われていること、すなわち SR mirror 以外の部分で透過する媒体が存在していることから、実効的な反射率が下がってしまっているのだと解釈できる⁶。次節では、各ロスによって量子雑音のスペクトルがどのように変更されるのかについて述べる。

4.2 感度曲線

4.2.1 SR Michelson 干渉計と Input Squeezing Michelson 干渉計

Symbol	broadband	detuned	Input SQ	Input SQ FD	NLC
m	5.6 kg	5.6 kg	5.6 kg	5.6 kg	2 g
ϕ	0 deg	0.315 deg	0.315 deg	0.315 deg	39.65 deg
$-20 \log_{10} s$	0 dB	0 dB	-20 dB	-20 dB	20 dB
λ	—	—	-60 deg	λ_{opt}	90 deg

Table 4.1: 干渉計のパラメータ。 $L=1200$ m, $I_0=10$ kW, $\omega_0 = 1.77 \times 10^{15}$ s⁻¹, $\rho = \sqrt{0.99}$ は固定している。 Input Squeezing では $s > 1$ としているため、符号が逆になる。

非線形光学結晶設置型重力波検出器の計算を行う前に、結晶を設置していない単純な SR Michelson 干渉計と、次世代型重力波検出器で有力である Input Squeezed SR Michelson 干渉計におけるロスの影響を見る。これらの干渉計のパラメータとしてはドイツの重力波検出器 GEO のものを用い [10], 非線形光学結晶設置型におけるロスの影響と比較する。パラメータの違いは表 4.1 を参照することとする。

前章までと同様にして感度曲線のスペクトルを求める。各ロスも真空場であることから、SR Michelson 干渉計の信号雑音比のスペクトルは、 $\epsilon_{\text{NLC}} = 0$, $s = 1$ として

$$S_h^\xi(f) = \frac{\mathbf{w} (\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger + \mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger + \mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger + \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger) \mathbf{w}^T}{\mathbf{w} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{w}^T} \quad (4.36)$$

と計算できる。ただし、

$$\mathbf{w} = (\cos \xi, \sin \xi)$$

である。 Input Squeezing を用いた SR Michelson 干渉計のスペクトルは、Squeezing factor を r , Squeezing angle を λ として

$$S_h^\xi(f) = \frac{\mathbf{w} \mathbf{A} R(\lambda) S(2r, 0) R(-\lambda) \mathbf{A}^\dagger \mathbf{w}^T}{\mathbf{w} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \mathbf{w}^T}. \quad (4.37)$$

⁶共振器内の電磁場から見れば、SRM も電磁場が漏れ出してしまうロスのポートである。

と与えられるのであった。Loss を含めた場合には、Input field の修正と干渉計内の Loss を修正する必要がある。Input field については式 (3.26) を

$$R(\lambda)S(r, 0)R(-\lambda)\mathbf{a} \rightarrow \sqrt{1 - \epsilon_{\text{in}}}R(\lambda)S(r, 0)R(-\lambda)\mathbf{a} + \sqrt{\epsilon_{\text{in}}}\mathbf{t}$$

のように修正する。このとき、伝達関数行列は

$$\mathbb{A}R(\lambda)S(r, 0)R(-\lambda)\mathbf{a} \rightarrow \sqrt{1 - \epsilon_{\text{in}}}\mathbb{A}R(\lambda)S(r, 0)R(-\lambda)\mathbf{a} + \sqrt{\epsilon_{\text{in}}}\mathbb{A}\mathbf{t}$$

と書き直すことができる⁷。また、SR Michelson 干渉計内部のロスについては $\epsilon_{\text{NLC}} = 0$, $s = 1$ とおけば修正可能である。以上より、Lossy な Input Squeezing SR Michelson 干渉計のスペクトルは

$$S_h^\xi(f) = \frac{\mathbf{w} [(1 - \epsilon_{\text{in}})\mathbb{A}R(\lambda)S(2r, 0)R(-\lambda)\mathbb{A}^\dagger + \mathbb{N}\mathbb{N}^\dagger + \mathbb{L}\mathbb{L}^\dagger + \mathbb{V}\mathbb{V}^\dagger + \epsilon_{\text{in}}\mathbb{A}\mathbb{A}^\dagger + \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger] \mathbf{w}^\text{T}}{\mathbf{w}\mathbb{H}\mathbb{H}^\dagger\mathbf{w}^\text{T}} \quad (4.38)$$

のように表される。比較対象として考える際には、Squeezing factor r と Squeezing angle λ を適切に選ぶ必要がある。 r の大きさは我々の系と同じ 26 dB とし、固定の Squeezing angle としては光ばねの共振周波数近傍で感度が上昇する $\lambda = -60 \text{ deg}$ を選択する (表 4.1)。さらに、Input Squeezing の感度を最大限に改善する適切な $\lambda = \lambda_{\text{opt}}$ とすれば [10], スペクトル (4.38) は

$$S_h^\xi(f) = \frac{\mathbf{w} [e^{-2r}(1 - \epsilon_{\text{in}})\mathbb{A}\mathbb{A}^\dagger + \mathbb{N}\mathbb{N}^\dagger + \mathbb{L}\mathbb{L}^\dagger + \mathbb{V}\mathbb{V}^\dagger + \epsilon_{\text{in}}\mathbb{A}\mathbb{A}^\dagger + \mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger] \mathbf{w}^\text{T}}{\mathbf{w}\mathbb{H}\mathbb{H}^\dagger\mathbf{w}^\text{T}} \quad (4.39)$$

のように書き換えることができる。broadband, detuned な状況下における Lossy SR Michelson 干渉計のスペクトルを図 4.3 に、Input Squeezing のスペクトルを図 4.4 に示す。ここで、homodyne angle ξ の変化による特徴的な振る舞いが見られないことから、次小節とは異なり $\xi = 90 \text{ deg}$ のみを見ている。図 4.3 より、Broadband なケースでは Loss の影響をほとんど受けていないが、detuned な場合にはロスにより dip が浅くなってしまっていることがわかる。また図 4.4 より、固定の Squeezing angle の場合、Frequency dependent な場合共に、光ばねの共振周波数付近で 1 桁以上感度が悪くなっていることが読み取れる。Frequency dependent な場合には光ばねの dip 周辺で SQL を十分に超えているが、この計算には λ に周波数依存性を持たせる役割を持つ Filter cavity のロスが入っていないため、実際のロスの影響はさらに大きくなる。

⁷Frequency dependent な Squeezing angle を実現するためには Filter cavity のロスも計算に入れる必要があるが、ここでは簡単のため省略している。

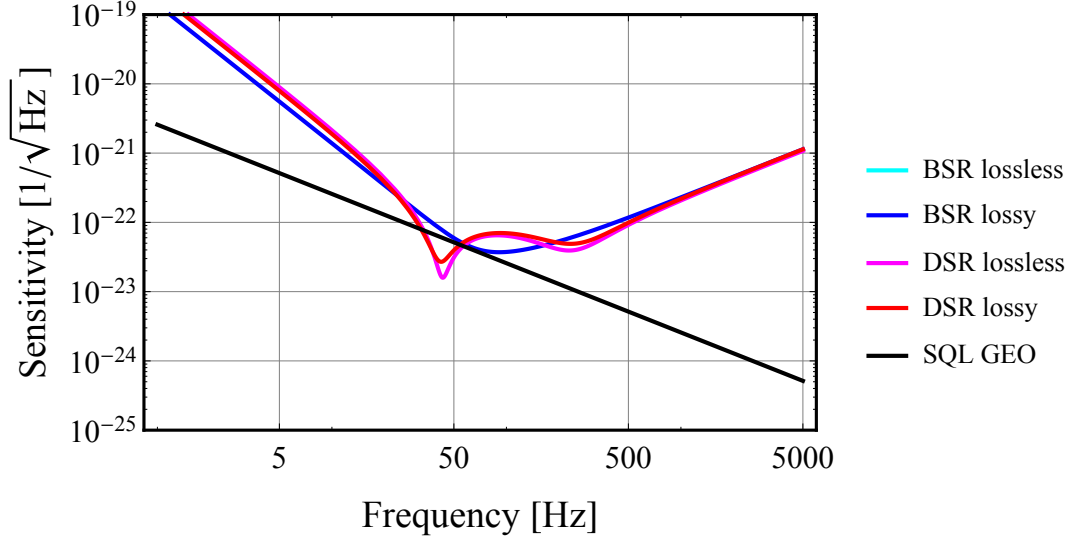


Figure 4.3: Lossless, Lossy な SR Michelson 干渉計の感度曲線と SQL. homodyne angle は 90 deg である. 各ロスの値は $\epsilon_{BS} = 100\text{ppm}$, $\epsilon_{arm} = 50\text{ppm}$, $\epsilon_{SRM} = 2000\text{ppm}$, $\epsilon_{NLC} = 0$, $\epsilon_{PD} = 0.1$ としており, その他のパラメータとしては表 4.1 のものを用いている.

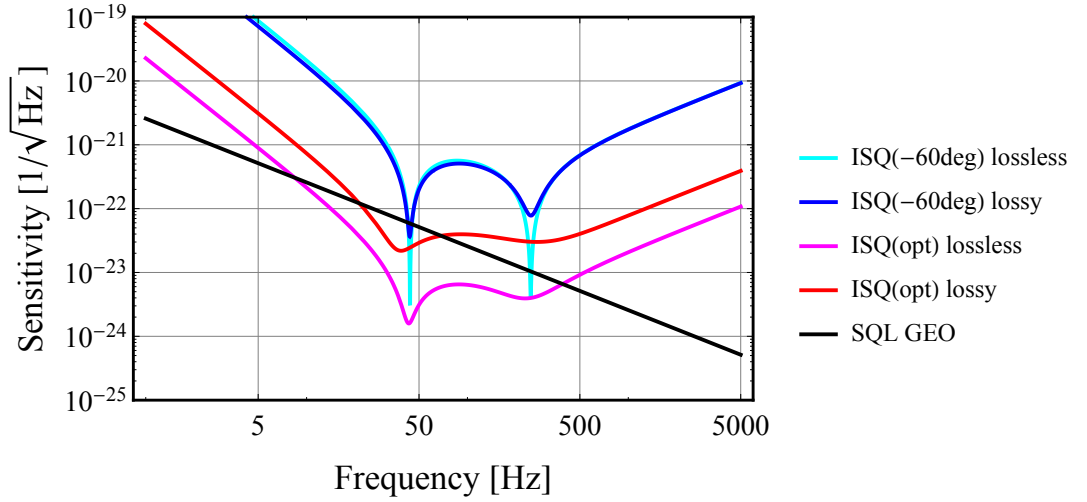


Figure 4.4: Lossless, Lossy な Input Squeezing SR Michelson 干渉計の感度曲線と SQL. homodyne angle は $\xi = 90\text{ deg}$ である. また, 各ロスの値は $\epsilon_{BS} = 100\text{ppm}$, $\epsilon_{arm} = 40\text{ppm}$, $\epsilon_{SRM} = 2000\text{ppm}$, $\epsilon_{NLC} = 0$, $\epsilon_{PD} = 0.1$, $\epsilon_{in} = 0.01$ としている.

4.2.2 非線形光学結晶設置型重力波検出器

ロスを含めた非線形光学結晶設置型のスペクトルは

$$S_h^\xi(f) = \frac{\mathbf{w} (\mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger + \mathbf{N}\mathbf{N}^\dagger + \mathbf{L}\mathbf{L}^\dagger + \mathbf{V}\mathbf{V}^\dagger + \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\dagger + \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger) \mathbf{w}^T}{\mathbf{w}\mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger\mathbf{w}^T}. \quad (4.40)$$

Lossless な場合と Lossy な場合の感度について, Homodyne angle $\xi = 90 \text{ deg}$, $\xi = 45 \text{ deg}$ で比較したものが図 4.5 である. 図から, Input Squeezing とは異なり ξ の値を変えることによってスペクトルの振る舞いが大きく変わっていることがわかる. $\xi = 90 \text{ deg}$ の場合には, ロスの影響は小さいがそもそも光ばねの dip が浅いため, 実用的ではない. $\xi = 45 \text{ deg}$ の場合には, optical resonance の周辺では 1 桁以上感度が落ちているが, 我々の注目している光ばねの共振周波数近傍では依然 SQL を大きく超えており, 感度を保てていることがわかる. この振る舞いの理由については 5.1 節で議論する.

最後に感度曲線の比較として, 周波数依存型の Input Squeezing SR Michelson 干渉計と我々の干渉計を図 4.6 に示す. 図より, 双方の受けるロスの影響は然程差が無く, どちらも光ばね近傍で 1 桁程度感度が悪化していることがわかる. しかし, Lossy な状況下でも非線形光学結晶設置型は光ばねの共振周波数付近で SQL を 2 桁程度超えており, 「高周波数帯で高感度な検出器」という目的は達成できていることが示された.

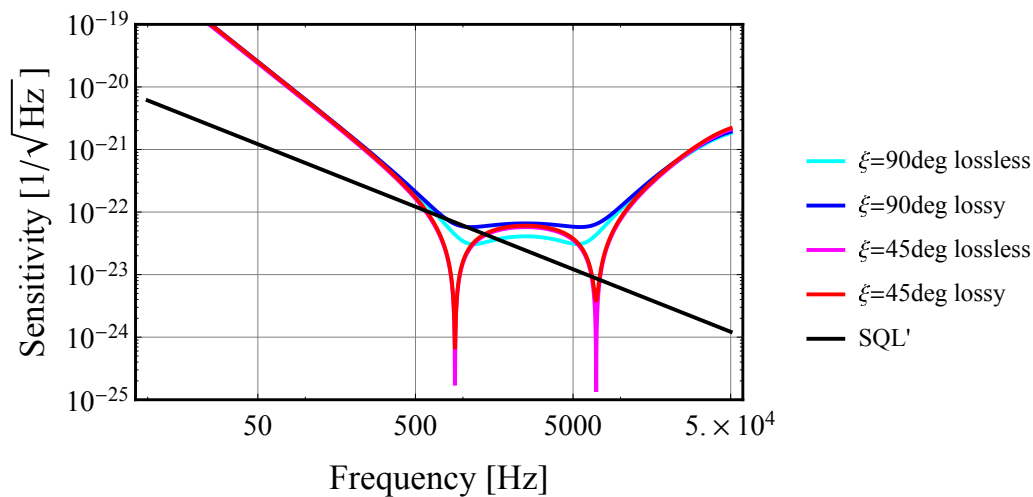


Figure 4.5: $\xi = 90 \text{ deg}$, 45 deg の場合の Lossless, Lossy な感度曲線と SQL. $\epsilon_{BS} = 100 \text{ ppm}$, $\epsilon_{arm} = 40 \text{ ppm}$, $\epsilon_{SRM} = 2000 \text{ ppm}$, $\epsilon_{NLC} = 0.01$, $\epsilon_{PD} = 0.1$ である. SQL が鏡の質量に依存しており, 我々の干渉計における SQL と GEO の SQL が異なることから SQL' としている. 図より, $\xi = 90 \text{ deg}$ の場合にはロスの影響を大きく受けているが, $\xi = 45 \text{ deg}$ では光ばねの共振周波数近傍で SQL を大きく超えており, Lossy な状況下でも高周波数帯で高感度を達成できていることがわかる.

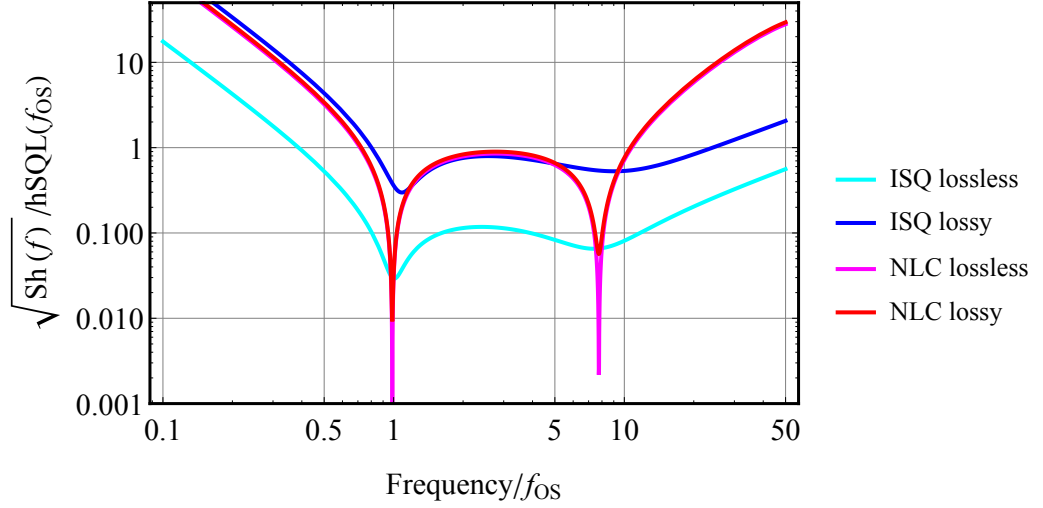


Figure 4.6: Input Squeezing (FD) と非線形光学結晶設置型の Lossless, Lossy な感度曲線. 縦軸は光ばねの共振周波数におけるそれぞれの h_{SQL} で, 横軸は Input Squeezing, 結晶設置型の Lossless における光ばねの共振周波数で規格化している. $\xi = 45 \text{ deg}$, $\epsilon_{BS} = 100 \text{ ppm}$, $\epsilon_{arm} = 40 \text{ ppm}$, $\epsilon_{SRM} = 2000 \text{ ppm}$, $\epsilon_{NLC} = 0.01$, $\epsilon_{PD} = 0.1$ である.

4.3 Noise ellipse

4.3.1 真空場の振る舞い

入射真空場 $\mathbf{a}$ と各ロス真空場の振る舞いは, それぞれの伝達関数行列を Homodyne 検出すれば調べることができる. 例えば入射真空場 $\mathbf{a}$ と NLC のロス真空場 $\mathbf{q}$ の振る舞いは

$$\begin{aligned} S_{b^a}^\xi(f) &= \frac{\mathbf{w} \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{w}^T}{|M|^2}, \\ S_{b^q}^\xi(f) &= \frac{\mathbf{w} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\dagger \mathbf{w}^T}{|M|^2} \end{aligned} \quad (4.41)$$

より理解することが可能である⁸. Homodyne angle $\xi = 90 \text{ deg}$, $\xi = 45 \text{ deg}$ における各真空場のスペクトルを図 4.7, 4.8 に示す. 図 4.7 より, 各真空場は光ばねの共振周波数近傍で一様に増幅していることがわかる. これは各ノイズスペクトルが $1/|M|$ を含んでおり, 光ばねの共振周波数で $1/|M|$ が発散していることに起因する. 現象としては, 光ばねによる信号の増幅と同様に, 周波数 Ω_{OS} を持つ真空場も共振し増幅されていると解釈できる. Homodyne angle $\xi = 45 \text{ deg}$ の場合のロス真空場も光ばね周辺で増幅しているが, $\xi = 90 \text{ deg}$ の場合に比べて全体的に 2 桁程度小さい. この振る舞いについての考察は次章で述べる. また, 2つの図に共通していることとして, NLC のロスの寄与が最も大きいこと, Photodetector のロスが一定の値を取っていることが挙

⁸これは信号雑音比のスペクトルから信号 h を除いたものであり, 雑音のみのスペクトルとなっている.

げられる。NLCのロスについては、入射強度 ϵ_{NLC} が他の真空場よりも大きいことが原因であり、入射強度を除いた振る舞いはおおよそ一致している。Photodetectorのロス真空場に関しては常に一定の値を取っているが、これはSR Michelson 干渉計の output で混入するロスであり、光ばねの影響を受けないことが理由である。

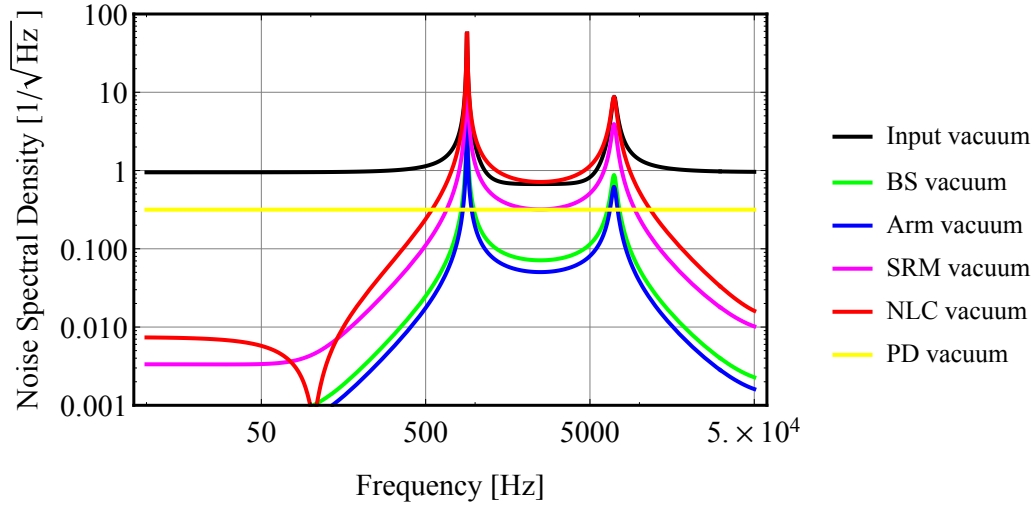


Figure 4.7: $\xi = 90 \text{ deg}$ における各真空場の振る舞い。縦軸は $\sqrt{S^\xi}$ ，横軸が振動数である。

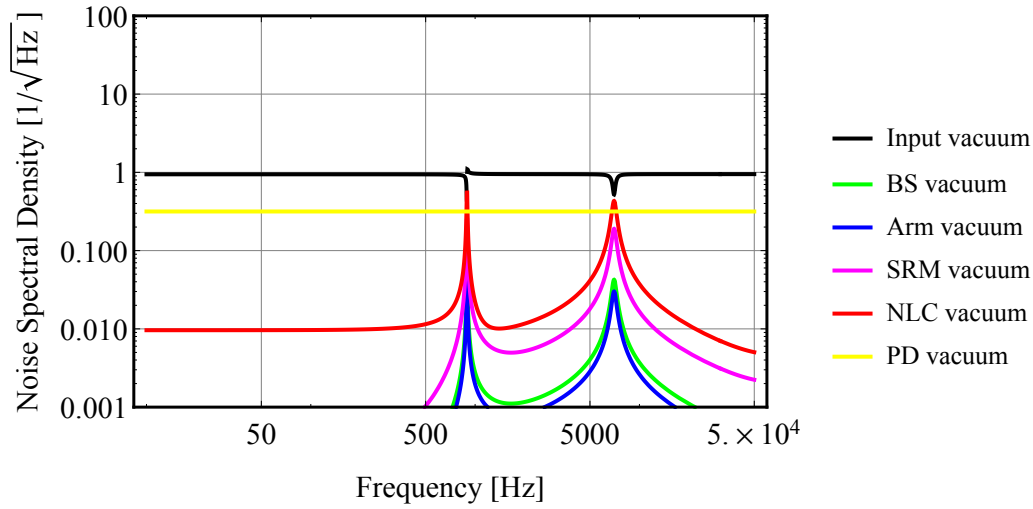


Figure 4.8: $\xi = 45 \text{ deg}$ における各真空場の振る舞い。

4.3.2 ロス真空場の面積

第2章より，真空場の面積はパワースペクトルとクロススペクトルから求めることができる．例えば結晶で混入する $\mathbf{q}$ のスペクトルは

$$\begin{aligned} S_{q_1} &= \frac{1}{|M|^2} (|Q_{11}|^2 + |Q_{12}|^2), \\ S_{q_2} &= \frac{1}{|M|^2} (|Q_{21}|^2 + |Q_{22}|^2), \\ S_{q_1 q_2} &= \frac{1}{|M|^2} (\Re[Q_{11}Q_{21}^* + Q_{12}Q_{22}^*]), \end{aligned} \quad (4.42)$$

のように計算でき，この雑音楕円の傾き φ_Q は

$$\begin{aligned} \varphi_Q &= \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \frac{S_{q_1} - S_{q_2}}{2S_{q_1 q_2}} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \left[\frac{|(Q_{11}|^2 + |Q_{12}|^2) - (|Q_{21}|^2 + |Q_{22}|^2)|}{2\Re[Q_{11}Q_{21}^* + Q_{12}Q_{22}^*]} \right] \end{aligned} \quad (4.43)$$

で与えられる．Homodyne angle $\xi = \varphi_Q$ ， $\varphi_Q + \pi/2$ とすれば楕円の短軸と長軸の長さを求めることができる．新しい検出軸を $b_{1'}^q$ ， $b_{2'}^q$ とし，この方向のノイズスペクトルを $S_{b_{1'}^q}$ ， $S_{b_{2'}^q}$ とすれば， $\sqrt{S_{b_{1'}^q}} \times \sqrt{S_{b_{2'}^q}}$ は π で規格化された雑音楕円の面積を表す．これより，入射真空場，BS ロス，SR mirror ロス，NLC ロスの雑音楕円の大きさを求めると図4.9 のようになる．注目すべきことは，各真空場の面積が共振の近傍で1を超えていることである．例えば，NLC のロス真空場は入射強度 $\epsilon_{\text{NLC}} = 0.01$ のコヒーレントな真円として混入しており，その面積は ϵ_{NLC} である．しかし，干渉計内を伝播することによってこのロス真空場が増幅し，混入時の面積よりも大きくなっている．この現象の物理的な解釈と原因については次章で議論する．

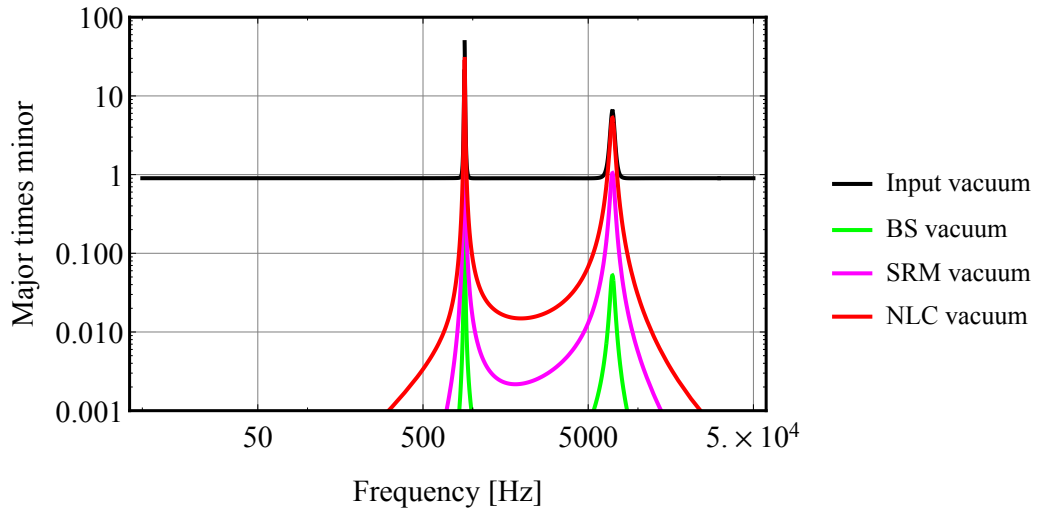


Figure 4.9: 各真空場の面積．縦軸は各真空場の雑音楕円における短軸 $\times$ 長軸の値であり，面積に対応している．

4.4 光学損失による影響のまとめ

4.1 節では、光学損失を含めた干渉計の Input-output relation を導出した。Fabry-Perot SR Michelson 干渉計における光学損失の計算は [11] で導かれているが、Beam Splitter のロスは無視されており⁹、Folding mirror も含まれていない。本修士論文における成果の 1 つとして、Beam Splitter のロス、Folding mirror の振る舞いまで考慮した Input-output relation を解析的に求めたことが挙げられる。

4.2 節では、これらの Input-output relation を利用して光学損失の影響を見た。期待していた「ロスの影響を受けない」という結果は得られなかったが、光ばねの共振周波数付近では SQL を 2 桁程度超える干渉計であることが示された。この SQL を超えるバンド幅はおよそ 800Hz 程度 (600Hz から 1400Hz 程度まで) であり、高周波数特化型重力波検出器への新しい提案となる。

4.3 節では非線形光学効果を用いた際の各雑音楕円の振る舞いを調べた。従来の検出軸である $\xi = 90 \text{ deg}$ では雑音が非常に大きくなっているが、 $\xi = 45 \text{ deg}$ 方向では雑音の値が小さくなっていることがわかった。Lossy な状況下で SQL を超えるのはこの $\xi = 45 \text{ deg}$ の場合であり、したがって我々の系における感度改善は信号増幅ではなくむしろ雑音の低減によるものである。また、各雑音源の面積は光ばねの共振周波数近傍で増幅しており、各々の入射強度を大きく上回っているという結果も得られた。

以上の結果を踏まえ、次章では各振る舞いの理由について議論する。

⁹Fabry-Perot Cavity を含む干渉計では、Arm のロスが Cavity で増幅されて出力されるため、Beam Splitter のロスは無視することができることが理由である。

Chapter 5

議論

5.1 Noise ellipse の傾き

Homodyne angle ξ によってロス真空場の大きさが大きく変わることが4.3節で示された．本章ではこの理由について，光学損失真空場の Input-output relation 及びその雑音楕円から考察を行う．

5.1.1 光ばね行列のはたらき

非線形光学結晶設置型重力波検出器における各ロス真空場の振る舞いを確認する．各ロス真空場の伝達関数行列は式 (4.32) で与えられる．これより，各真空場が受ける最後の作用は光ばね行列 $\mathbb{M}$ で統一されていることがわかる．光ばね行列は

$$\mathbb{M} = [\mathbb{I} - \sqrt{\epsilon_{\text{SRMI}}} \rho e^{2i\beta} R S \mathcal{P}_* R]^{-1} M \quad (5.1)$$

で与えられており，その成分は (4.26) であった．この行列が真空場にもたらす作用について考える．行列 $\mathbb{M}$ のパワースペクトル，クロススペクトルはそれぞれ

$$\begin{aligned} S_{b_1^m} &= \frac{1}{|M|^2} (|M_{11}|^2 + |M_{12}|^2) , \\ S_{b_2^m} &= \frac{1}{|M|^2} (|M_{21}|^2 + |M_{22}|^2) , \\ S_{b_1^m b_2^m} &= \frac{1}{|M|^2} (\Re[M_{11} M_{21}^* + M_{12} M_{22}^*]) , \end{aligned} \quad (5.2)$$

で与えられ，雑音楕円の傾きは式 (4.43) の Q を M に置き換えれば求められる．この傾きを φ_{OS} とすれば，(5.2) を成分に持つ Covariance 行列 Σ は

$$\Sigma = \begin{pmatrix} S_{b_1^m} & S_{b_1^m b_2^m} \\ S_{b_1^m b_2^m} & S_{b_2^m} \end{pmatrix} = R(\varphi_{\text{OS}}) \begin{pmatrix} S_{b_1^m} & 0 \\ 0 & S_{b_2^m} \end{pmatrix} R(-\varphi_{\text{OS}}) = R(\varphi_{\text{OS}}) \Sigma' R(-\varphi_{\text{OS}}) \quad (5.3)$$

のように対角化できる．これは Homodyne angle $\xi = \varphi_{\text{OS}}$ で新たな検出軸 b_1^m, b_2^m を設定し，楕円の短軸，長軸を見やすくすることと同値である． $S_{b_1^m}, S_{b_2^m}$ の具体形は

$$\begin{aligned} S_{b_1^m} &= \frac{S_{b_1^m} + S_{b_2^m}}{2} + \frac{S_{b_1^m} - S_{b_2^m}}{2} \sqrt{1 + \tan^2 2\theta}, \\ S_{b_2^m} &= \frac{S_{b_1^m} + S_{b_2^m}}{2} - \frac{S_{b_1^m} - S_{b_2^m}}{2} \sqrt{1 + \tan^2 2\theta}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

のように計算でき， $\theta \neq 45 \text{ deg}$ のとき $\theta = \varphi_{\text{OS}}$ ， $\theta = 45 \text{ deg}$ のときは $\tan 2\theta = 0$ より根号内の第二項はゼロとなる．ここで，イメージを掴みやすくするため， $S_{b_1^m}$ が雑音楕円の短軸である場合に，光ばね行列がコヒーレント真空場 (真円) に及ぼす影響を考える．真円はまず $R(-\varphi_{\text{OS}})$ の回転作用を受けるが，回転の対象が真円であることからこの作用は無視することができる．次に真円は，短軸が $S_{b_1^m}$ ，長軸が $S_{b_2^m}$ となるように Squeeze され，真円から楕円に変換される．実際に，

$$\sqrt{S_{b_1^m}} \times \sqrt{S_{b_2^m}} = 1$$

であるときには， Σ' は Squeezing 行列 $S(r, 0)$ に書き直すことができる¹． Σ' によって変換された楕円は，短軸と長軸の比 $\sqrt{S_{b_2^m}/S_{b_1^m}}$ が大きいときには強く Squeeze された楕円に，比が小さいときには弱く Squeeze された楕円になる²．このようにして楕円に変換された真空場は，最後に回転行列の作用を受け φ_{OS} だけ反時計回りに回転する．これにより，もとの座標系で見た楕円は反時計回りに φ_{OS} だけ回った位置に短軸 $S_{b_1^m}$ が存在しているように見えている．以上が Covariance 行列によって与えられる作用であり，すなわち光ばね行列は，擬似的な Squeezing によって真空場を楕円に歪める作用と φ_{OS} の回転作用を持っていることがわかる．式 (4.32) の $\mathbb{Q}$ に注目すれば，ロス真空場 $\mathbf{q}$ はまず真円の状態で回転行列 R の作用を，次に光ばね行列の作用を受けている．すなわち，結晶で混入するロスの楕円の傾きは完全に φ_{OS} と一致しており，この角度で短軸を持つため，図 4.8 のようにノイズスペクトルが小さくなったのだと考えられる．

次に，光ばね行列以外の Squeezing 行列を含む例として $\mathbb{V}$ について考える．SR mirror のロス真空場 $\mathbf{v}$ は回転，Ponderomotive Squeezing, Squeezing, 回転，光ばね行列の順番に作用を受けている．光ばね行列が作用する前に Squeeze されている場合の Covariance 行列が及ぼす影響を考えれば，SR mirror のロス真空場の傾きを求めることができる．Covariance 行列 Σ は後続の真空場に対して (5.3) のような作用を与える．すなわち，

$$\mathbb{M} \rightarrow R(\varphi_{\text{OS}}) \begin{pmatrix} \sqrt{S_{b_1^m}} & 0 \\ 0 & \sqrt{S_{b_2^m}} \end{pmatrix} R(-\varphi_{\text{OS}})$$

のように分解して考えることが可能である³．ここで，簡単のために回転行列 $R(-\varphi_{\text{OS}})$ を Squeezed 真空場 $\mathbf{p}$ に吸収させる：

$$R(\varphi_{\text{OS}}) \begin{pmatrix} \sqrt{S_{b_1^m}} & 0 \\ 0 & \sqrt{S_{b_2^m}} \end{pmatrix} R(-\varphi_{\text{OS}}) \mathbf{p} \rightarrow R(\varphi_{\text{OS}}) \begin{pmatrix} \sqrt{S_{b_1^m}} & 0 \\ 0 & \sqrt{S_{b_2^m}} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{p}}.$$

¹Ponderomotive Squeezing がこれに当てはまる．

²ここで Squeeze という単語を用いているが，Squeezing は最小不確定状態を保った状態でゆらぎの大きさを変更することであり，厳密な定義とは異なることに注意する．具体的には， $S_{b_1^m}$ と $S_{b_2^m}$ が共に 1 を超える場合には短軸も長軸も伸長する．

³振幅に置き換えるために根号をつけている．

Squeezed vacuum $\tilde{p}$ の振幅ゆらぎを $\tilde{p}_1$ 、位相ゆらぎを $\tilde{p}_2$ とすれば、座標 $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ は雑音楕円上の点を表す。これに光ばね行列の Squeezing が作用すると、雑音楕円上の点は

$$(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \rightarrow (\sqrt{S_{b_1'^m}}\tilde{p}_1, \sqrt{S_{b_2'^m}}\tilde{p}_2)$$

へと変更される (図 5.1)。ここで、 $\sqrt{S_{b_1'^m}}$ が短軸、 $\sqrt{S_{b_2'^m}}$ が長軸であり、短軸と長軸の比が十分に大きい場合を考える。このとき、雑音楕円 $(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ は位相軸に長軸、振幅軸方向に短軸を持つ楕円へと変換される。すなわち短軸方向が振幅軸となす角 $\simeq 0 \text{ deg}$ であり、これに回転行列 $R(\varphi_{OS})$ が作用することで、楕円の短軸は φ_{OS} 方向を向くことになる。すなわち、光ばね行列の短軸 $\sqrt{S_{b_1'^m}}$ と長軸 $\sqrt{S_{b_2'^m}}$ の比が十分に大きい場合には、それ以前に受けた Squeeze の影響に関係なく、変換後の楕円は φ_{OS} 方向を向く。逆に、光ばね行列の $\sqrt{S_{b_1'^m}}$ と $\sqrt{S_{b_2'^m}}$ の比が十分に大きくない場合、雑音楕円の短軸は振幅方向に向くとは限らず、光ばね行列以前の Squeeze の影響を受けることになる。

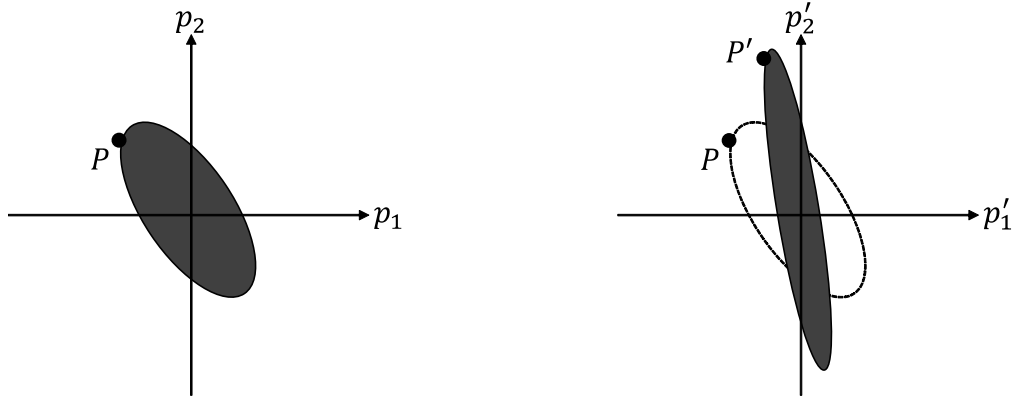


Figure 5.1: 光ばね行列による Squeezed vacuum の変化.

5.1.2 optimal Homodyne angle

我々の干渉計における光ばね行列 M の作用を評価する。 $\sqrt{S_{b_1'^m}}$ と $\sqrt{S_{b_2'^m}}$ のグラフをプロットすると図 5.2 のようになる。これより、 $\sqrt{S_{b_1'^m}}$ は短軸、 $\sqrt{S_{b_2'^m}}$ は長軸を表し、共振周波数近傍においてその比は 10^2 程度あることがわかる。

次に、実際の光ばね行列の雑音楕円角度 φ_{OS} と各真空場、信号の角度を図 5.3 に示す。これより、確かに光ばね行列の角度と真空場の角度は一致している。以上から、光ばね行列の性質によってのみ、ロス真空場の雑音楕円の方向が決まることが示された。 $\xi = 45 \text{ deg}$ で雑音のスペクトルの大きさが小さくなったのは、ちょうど雑音楕円の短軸方向で Homodyne 検出をしていたことが理由であり、各雑音楕円の短軸が重なっているため、ロスの影響も $\xi = 90 \text{ deg}$ より大きく受けている。さらに、図 5.3 から読み取れるように、光ばね行列の作用を受けて信号も雑音長軸と同方向を向く。2.2 節で述べたように、Homodyne 検出では雑音だけでなく信号も新しい検出軸へと射影するため、ロスの影響を受けやすくなっている。しかし、ロスの影響を受けたとしてもベースの雑音が小さくなるため、我々にとって最も都合の良い Homodyne angle は $\xi = \varphi_{OS}$

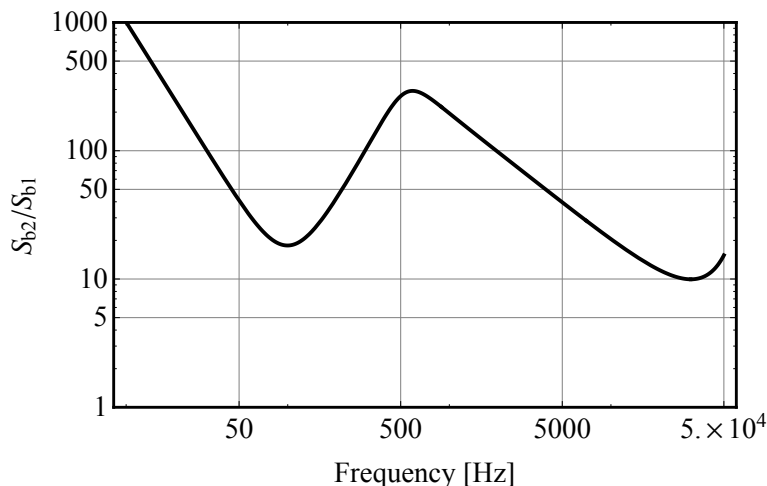


Figure 5.2: 光ばね行列における $\sqrt{S_{b_1'}}$ と $\sqrt{S_{b_2'}}$ の比.

近傍であると言える⁴. 角度が周波数依存でなく, 周波数に依存しない場合であれば, 光ばねの共振周波数における $\varphi_{OS}(f = f_{OS}) \simeq 45 \text{ deg}$ で取れば, Lossy でも光ばねの共振周波数で感度の良い干渉計となる.

もともと我々の干渉計は雑音減少をモチベーションとした Input Squeezing に対し, 信号増幅をモチベーションとした干渉計として考案された. しかし, 「非線形光学効果を用いた光ばねの硬化によって各雑音楕円を強く Squeeze → 向きを固定し, 検出軸方向の雑音を減少させている」ということが本質であると考えられる⁵.

5.2 Input Squeezing SR 干渉計との比較結果について

5.2.1 NLC 設置型の評価

図 4.5, 4.6 より, NLC 設置型の重力波検出器は, Lossy な状況下でも光ばねの共振周波数で 10^{-23} 以上の感度を達成できており, SQL を 2 桁程度突破できていることが示された.

1. Fabry-Perot 共振器や長い基線長を用いずに 10^{-23} 以上の感度を達成できること
2. Filter Cavity のような追加の機構を必要としないこと
3. kHz という高周波数帯で SQL を突破できること
4. Lossy な環境でも 2 桁程度 SQL を突破できること

⁴光ばねのような輻射圧の大きい現象のもとでは, Variational Readout angle と雑音の短軸角度は一致する [5]. しかし, 厳密に $\xi = \varphi_{OS}$ としてしまうと信号の垂直方向を向いてしまうため注意が必要である. 実際に, 各雑音や信号が最小となる角度は 46 度程度であるのに対し, Homodyne angle は 45 度としている.

⁵先行研究 [17] でも示唆されている.

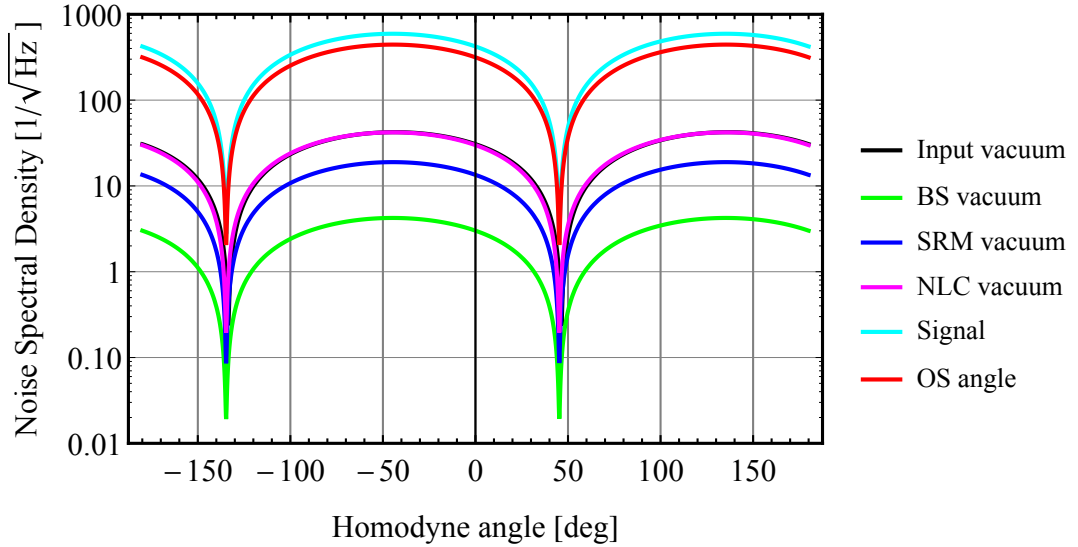


Figure 5.3: 900 Hz における光ばね行列と各真空場の振る舞い．45 度付近で全てのプロットが最小値，すなわち短軸をとっていることがわかる．ここで，光ばね行列のスペクトルと信号のスペクトルについては大きさを合わせるために適当に規格化した．同じ周波数で信号と雑音が最小となるが，信号の方が回復が早いことがわかる．

が我々の干渉計の持つ利点である．欠点としては，kHz 帯に光ばねの周波数を移動させるためには最低でも 20dB 程度の比較的大きな Squeezing factor が必要であることである．現状では 15dB 程度の Squeezing は確認されているため [16]，こういった Squeezing の技術開発が必要となる．

5.2.2 Input Squeezing の評価

Input Squeezing の評価を行う前に，Squeezing factor を小さくした際の Lossy Input Squeezing SR Michelson 干渉計の振る舞いを議論する．スペクトルを図 5.4 に示す．これより，たとえ 7dB 以上 Squeezing factor を大きくしたとしても，ロス真空場の影響により感度に変化しないことがわかる⁶．これは，Input vacuum $\mathbf{a}$ に作用する Squeeze を強くしたとしても，干渉計伝播で混入するロス真空場が $S(r, \varphi)\mathbf{a}$ の短軸方向の大きさを超えており，意味をなさないからである．すなわち，今回設定したロスの環境下において，Input Squeezing で向上可能な感度は高々 7dB 程度である．NLC 設置型の干渉計では，入射真空場 $\mathbf{a}$ と共にロス真空場も Squeeze しており，かつその短軸角度も一致しているため，Squeezing factor の値を上昇させれば Lossy でも感度は向上する．実際に，Input Squeezing 干渉計と NLC 設置型の光ばね行列について短軸と長軸の比を比較すると図 5.5 のようになる．図より，Input Squeezing の光ばねの硬度は NLC 設置型に比べて小さい．これが要因となり，入射真空場 $\mathbf{a}$ や各ロス真空場の傾きに差が生じ（図 5.6），感度曲線はロスによって制限されている．

Input Squeezing の持つ利点は

⁶7dB より小さい場合には更に感度が悪化する．

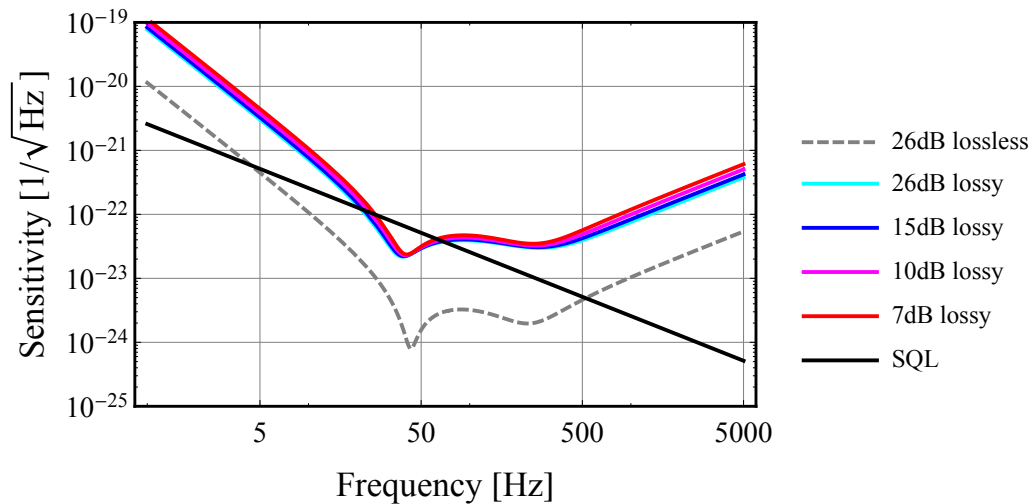


Figure 5.4: Squeezing factor を変化させたときの Input Squeezing 干渉計の感度曲線. Lossy な環境下では, ロス真空場の影響により, 7dB 程度でも 26dB の Squeezing と同じスペクトルとなる.

1. 中周波数帯で SQL を 1 桁突破できること
2. Input Squeezing factor は 7dB 程度であり, 技術開発が不要であること

の 2 点である. 欠点としては

1. Filter Cavity のような追加の機構が必要であること
2. Lossy な環境では高々 7dB 程度の改善しかできないこと

である. 現状, 地上に存在している重力波検出器は全て 100Hz 程度に良い感度を持っており, 高周波数帯に高感度である検出器は存在していない. 上記の利点と欠点を踏まえると, Squeezing の技術開発が順調に進んだ場合には, NLC 設置型重力波検出器は「高周波数帯で高感度」「ロス環境下で SQL を 2 桁超える」という新しい特性を持った検出器になり得ると言える.

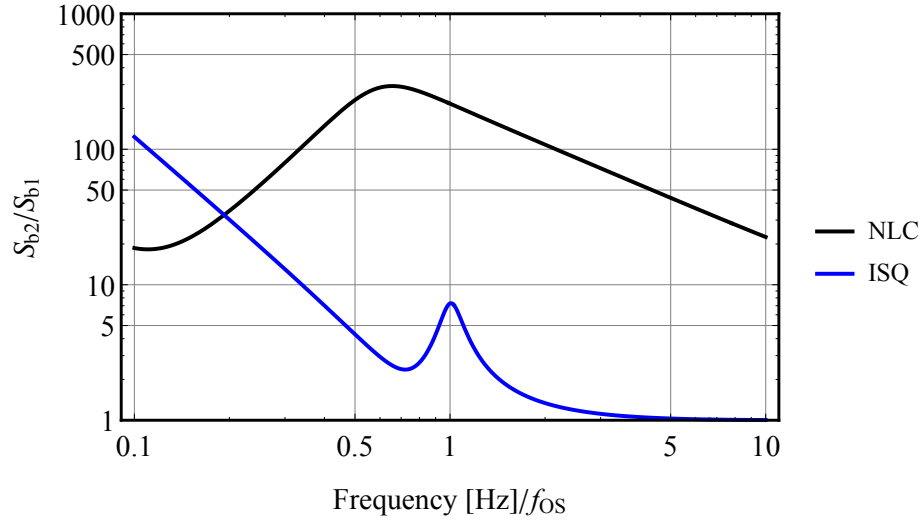


Figure 5.5: M の短軸，長軸の比．横軸は光ばねの共振周波数付近で規格化している．NLC 設置型に比べ Input Squeezing の比は小さい．これにより各雑音楕円の向きが固定されず，ロスによって感度が制限される．

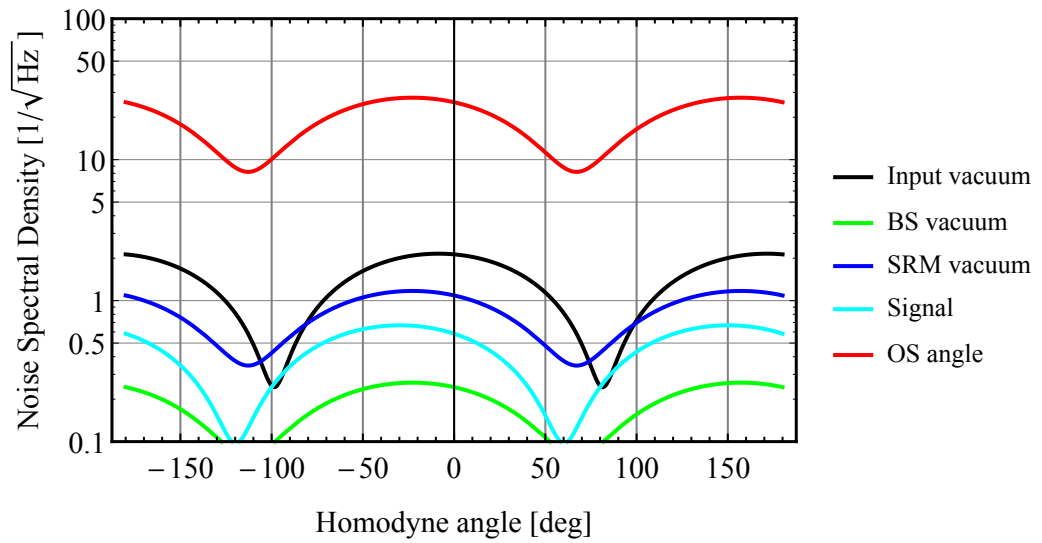


Figure 5.6: 光ばね共振周波数 42Hz における Input Squeezing SR Michelson 干渉計の各真空場の雑音楕円の振る舞い．

5.3 NLC ロス真空場の面積

4.3 節より，混入したロス真空場の雑音楕円面積が入射強度を超えていることがわかった．本節では，ロス真空場が増大する原因について Feedback 系を例として説明し，ロス真空場にとっての損失である SR mirror の反射率 $\rho \rightarrow 1$ の極限で面積が保存することを述べる．

5.3.1 面積の増大

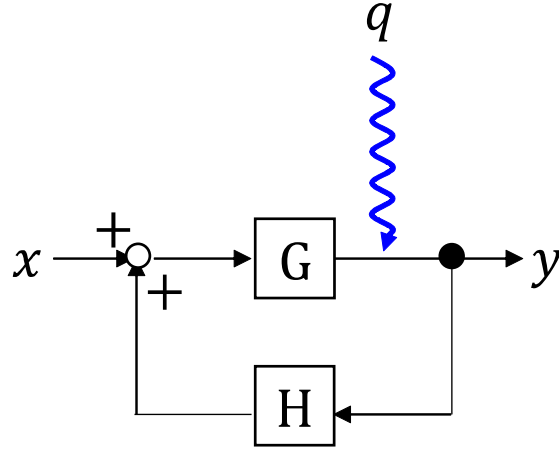


Figure 5.7: SR 共振器を Feedback 系に見立てたブロック図. $G = \mathcal{P}$, $H = \rho$ である.

NLC のロス真空場のみに着目すると、我々の干渉計は図 5.7 のようなブロック図で描くことができる．ここで、簡単のため結晶と detune は無視している．SR 共振器内で混入した NLC ロスは、共振器内において反射率 ρ で Feedback され再度干渉計を伝播し、 y に出力される．このような Feedback 系を入力が伝播するとき、出力 y と入力 x の比は Feedback の Gain に対応している：

$$y = \frac{G}{1 + GH} x .$$

同様に、NLC のロス q の Gain は

$$y^q = \frac{1}{1 + GH} q .$$

すなわち、SR 共振器が Feedback 制御と同等の役割を果たしていることにより、共振器内部における入力 q は Gain を持って出力される：

$$b^q = \frac{1}{M} \mathbb{Q} q .$$

Ponderomotive Squeezing や回転のような等積変形では、雑音楕円の形・向きが変動したとしても面積は不変である．しかし、共振器内部で共振して出力された真空場は各々の Gain で増幅してしまう．式 (4.30) の第二項は入射真空場 $\mathbf{a}$ の透過共振成分を示し、これのみに注目すればロス真空場と同様の振る舞いを示す．しかし、 $\mathbf{a}$ の場合にはこの増幅を帳消しにする反射成分（同式第一項）が存在するため、lossless の場合には面積が保存している (3.16)．ロス真空場の面積の増幅は結晶設置型ではない SR Michelson 干渉計でも起こる現象であり（図 5.8）、共振器による感度向上の代償と言える．

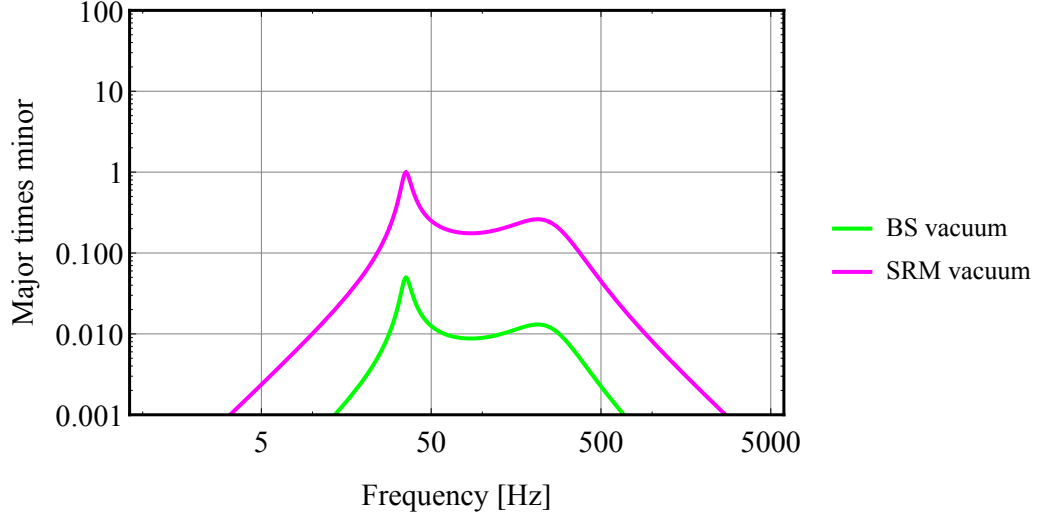


Figure 5.8: 結晶を設置していない通常の SR Michelson 干渉計におけるロスの面積.

5.3.2 loss port の Input-output relation

前小節では SR 共振器によってロスの増大が生じることを述べた．雑音楕円の面積が増大しているということは，位相ゆらぎと振幅ゆらぎの最小不確定状態が破れていることに他ならない．物理的には，真空場が何処かの段階で自身の情報を失っており，結果としてゆらぎの最小不確定状態が崩れゆらぎが増大したのだと解釈できる．我々のロスの導入は図 4.1 のように行っただが，これはロスの透過成分 $\sqrt{1 - \epsilon_{\text{NLC}}}\mathbf{q}$ を無視しており，損失の損失が生じていることがわかる．この透過成分まで含めて考えれば入射ロス $\sqrt{\epsilon_{\text{NLC}}}\mathbf{q}$ の入射前の面積は 1 である．NLC のロスを例に取り，この透過成分を求める．

図 5.9 のように場を定義する．ここで，Loss の混入はワンパスであることに注意する．各真空場のロス $\mathbf{q}$ 成分を ^{q} と書くことにすれば， $\mathbf{q}'^q$ は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}'^q &= \sqrt{1 - \epsilon_{\text{NLC}}}\mathbf{q} - \sqrt{\epsilon_{\text{NLC}}}S\mathbf{d}^q \\
 &\rightarrow \sqrt{1 - \epsilon_{\text{NLC}}}\mathbf{q} - \frac{1}{M}\epsilon_{\text{NLC}}\rho^{2i\beta}S\mathcal{P}RMR\mathbf{q} \\
 &= \frac{1}{M}(\mathbb{Q}'_{\text{trans}} + \mathbb{Q}'_{\text{ref}})\mathbf{q}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

と計算できる⁷． $\mathbf{b}$ に含まれている $\mathbf{q}$ の面積と $\mathbf{q}'^q$ の面積を比較したものが図 5.10，雑音楕円角度を示したものが図 5.11 である．ここで，入力と出力が一次元である古典的な電磁場においては，共振器からの反射光 E_{ref} と透過光 E_{trans} の二乗和が入射光強度 E_{in} と等しくなるが，two photon formalism を用いた量子的な計算では，透過光と反射光を結合する際に適切な処理が必要となる．実際に，図 5.10 で単純な和をとっても情報の復元はできていない．

情報を復元するための最も簡単な具体例として，SR mirror の反射率 $\rho \rightarrow 1$ の場合の振る舞いを確認する． $\rho \rightarrow 1$ のとき， $\tau \rightarrow 0$ であるため $\mathbb{Q}$ はゼロ行列となる．これ

⁷ $\epsilon_{\text{NLC}} = 0$ のとき， $\mathbf{b}^q = \mathbf{0}$ ， $\mathbf{q}'^q = \mathbf{q}$ となる．

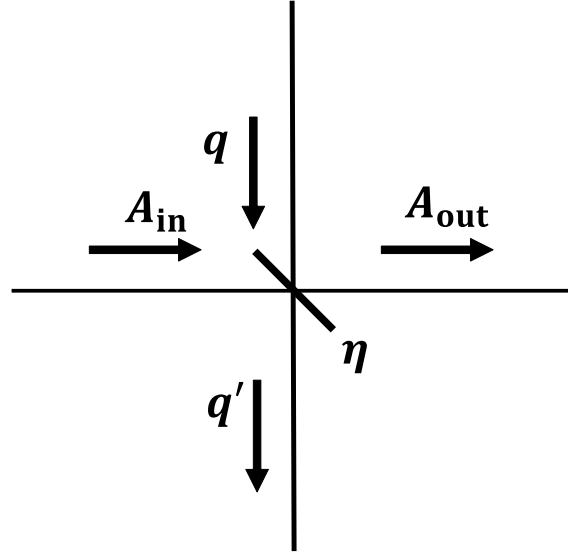


Figure 5.9: ロスの透過成分の導入.

と同時に Q'_{ref} の行列も変化する．これは，ロス真空場にとっての損失である SR mirror を閉じたことで，SR mirror で失っていた q の成分が q' の出力に返還されたと解釈することができる⁸．SR mirror における損失の返還により，結晶のロス q の出力は q' のみとなる．以上の操作によって q の情報は復元され， q'^a の面積は任意の周波数帯で 1 となる（図 5.10）．

このように共振器内で混入した真空場は，その揺らぎが増幅された状態で出力される．具体的には，光ばね行列 M が作用した時点，すなわち SR mirror で反射された時点で増幅が生じる．このとき，単純に分裂後の真空場の面積和をとっても 1 には戻らず，前述のような片側の出力をもう 1 つの出力に押し付けるようにしなければ情報を復元することはできない．光ばね行列が作用する前の状態まで戻すことができれば面積和が 1 となるが⁹，共振器を用いている以上このような思考実験は意味をなさない．以上をまとめると，Fabry-Perot Cavity や SR Cavity を用いた重力波検出器では，Lossless の感度向上と同時にロスの増幅も生じてしまっていることがわかる．

⁸ a にとっての b と同様に， q は本来 q' に出力されるべきものであり，SR mirror は q にとっての loss port である．

⁹このとき，透過成分は $\sqrt{1 - \epsilon_{\text{NLC}}}q$ ，反射成分は $\sqrt{\epsilon_{\text{NLC}}}Rq$ となり，それぞれの面積は $1 - \epsilon_{\text{NLC}}$ と ϵ_{NLC} である．

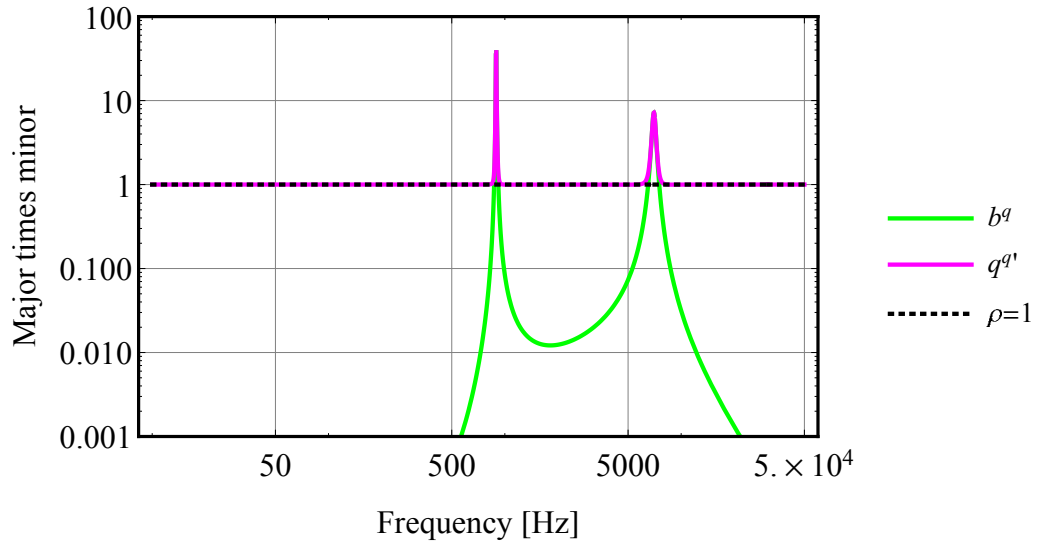


Figure 5.10: b^q と q'^q の面積. どちらも大きさ 1 を超えており, 単純な和では面積の保存を示すことができない. 黒線は $\rho \rightarrow 1$ の極限における q'^q の面積を表す.

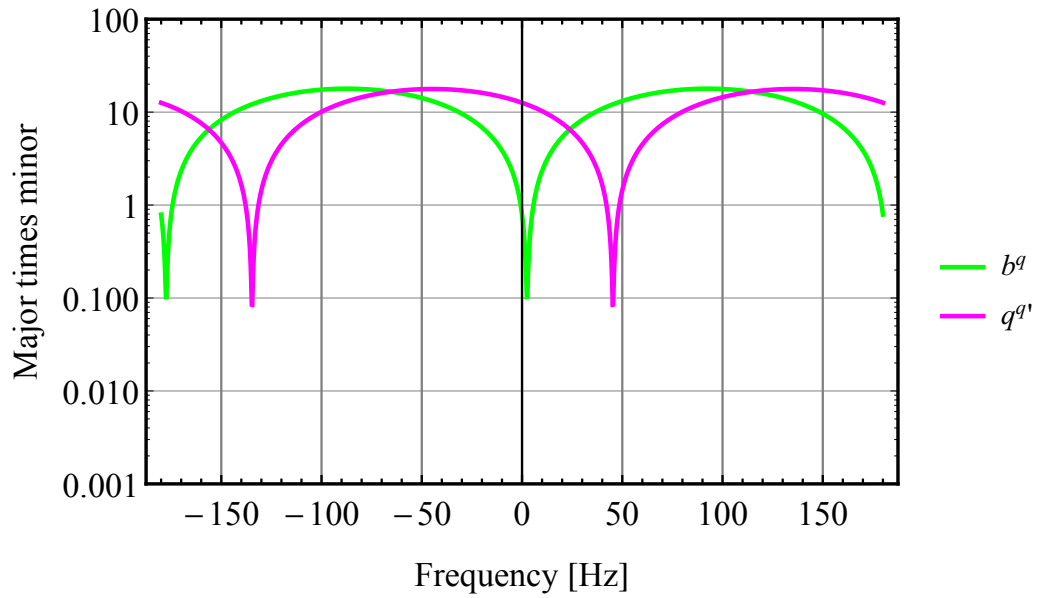


Figure 5.11: b^q と q'^q の雑音楕円角度.

Chapter 6

結論

本修士論文のテーマでもある「光学損失を含んだ非線形光学結晶設置型重力波検出器の Input-output relation を導出した．その結果，各真空場の伝達関数行列は非線形光学効果の下で光ばね行列 M に制御されていることが示された．

非線形光学結晶設置型重力波検出器の持つ強みは，光ばねの硬化を理由とした「高周波数帯における感度の向上」「量子ゆらぎの向きの固定による雑音の低減」の2つである．信号増幅型と呼ばれてきた我々の干渉計は，Input Squeezing 干渉計を代表とした雑音減少型の干渉計に近い性質を持っている．しかし，信号からおおよそ垂直方向である雑音楕円の短軸方向近傍で Homodyne 検出を行うため，光学損失の導入による感度の悪化は Input Squeezing 型と然程変わらない．しかし，高周波数帯で標準量子限界を2桁程度突破できるのは，非線形光学結晶設置型が持つ特有の優位性であると言える．

雑音楕円の面積が増幅する問題については，「共振した電磁場が Feedback における Gain と同等なものを持ってしまう」という共振器特有の現象である．最小不確定状態が破れているという観点から見れば，ロスが自身の情報を失っていることが原因であった．Loss が入射する際の透過成分まで考慮すれば情報を復元できるが，これは現実的ではない．共振器におけるロスの増幅は，Fabry Perot 共振器や SR 共振器による感度向上のための代償であると言える．

Bibliography

- [1] B. P. Abbott et al. , GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. Phys. Rev. Lett. 119, 161101 (2017)
- [2] B. P. Abbott et al. , Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. Phys. Rev. Lett. 116, 061102 (2016)
- [3] K. Somiya, Y. Chen, S. Kawamura, N. Mio, Frequency noise and intensity noise of next-generation gravitational-wave detectors with RF/DC readout schemes. PHYSICAL REVIEW D 73, 122005 (2006)
- [4] D. Heinert, K. Craig, H. Grote, S. Hild, H. Luck, R. Nawrodt, D. A. Simakov, D. V. Vasilyev, S. P. Vyatchanin, and H. Wittel, Thermal noise of folding mirrors. Phys. Rev. D 90, 042001 (2014)
- [5] H. J. Kimble, Yu. Levin, A. B. Matsko, K. S. Thorne, and S. P. Vyatchanin. Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum non-demolition interferometers by modifying their input and/or output optics. Phys. Rev. D, 65(022002), 2001.
- [6] Haixing Miao, Stefan Danilishin, Helge Müller-Ebhardt and Yanbei Chen, Achieving ground state and enhancing optomechanical entanglement by recovering information. New Journal of Physics 12 (2010) 083032
- [7] Yiqiu Ma. Optomechanical Physics in the Design of Gravitational Wave Detectors. Ph.D thesis (2015)
- [8] K. Somiya, Y. Kataoka, J. Kato, N. Saito and K. Yano. Parametric signal amplification to create a stiff optical bar. Physics Letters A 380 (2016)
- [9] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, The classical theory of fields Pergamon Press,(1975).
- [10] Jan Harms, Yanbei Chen, Simon Chelkowski, Alexander Franzen, Henning Vahlbruch, Karsten Danzmann, and Roman Schnabel. Squeezed-input, optical-spring, signal-recycled gravitational-wave detectors. Phys. Rev. D, 68(042001), 2003.

- [11] Alessandra Buonanno and Yanbei Chen. Quantum noise in second generation, signal-recycled laser interferometric gravitational-wave detectors. PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 64, 042006
- [12] Alessandra Buonanno and Yanbei Chen. Signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors as optical springs. PHYSICAL REVIEW D, VOLUME 65, 042001
- [13] C. M. Caves and B. L. Schumaker, Phys. Rev. A 31, 3068 1985.
- [14] V.B. Braginsky, S.E. Strigin, S.P. Vyatchanin, Parametric oscillatory instability in Fabry - Perot interferometer. Physics Letters A 287 (2001)
- [15] A. Wicht, K. Danzmann, M. Fleischhauer, M. Scully, G. Muller, R.-H. Rinkleff, White-light cavities, atomic phase coherence, and gravitational wave detectors. Optics Communications 134 (1997)
- [16] Vahlbruch, Henning, et al., Detection of 15 dB squeezed states of light and their application for the absolute calibration of photoelectric quantum efficiency. Physical Review Letters 117.11 (2016)
- [17] 片岡優, 非線形光学効果を用いた次世代型重力波検出器の要素技術開発 (2017 年の修士論文)
- [18] Y. Yokotera and N. Yamamoto, EPJ Quantum Technology (2016) 3:15
- [19] Yiqiu Ma, Haixing Miao, Belinda Heyun Pang, Matthew Evans, Chunnong Zhao, Jan Harms, Roman Schnabel and Yanbei Chen, Proposal for Gravitational-Wave Detection Beyond the Standard Quantum Limit via EPR Entanglement. Nature Physics volume 13, pages 776 - 780 (2017)

謝辞

本修士論文を記述するにあたり、多くの方々からご支援を頂きました。指導教官である宗宮健太郎先生には、知識だけでなく、研究への取り組み方や困難に直面したときの対処の仕方など、本当に多くのことまで指導していただきました。特に、様々な現象を直感的に理解することの大切さや、シンプルなケースから物事を考えていく姿勢は大変勉強になりました。また、実験系の研究室にも関わらず理論の研究をする後押しをしていただき、ありがとうございました。ドイツへの海外出張を承諾して頂いたり、海外の研究者との交流をお手伝い頂いたり、自分の視野を広げる多くの機会を頂きました。3年間ありがとうございました。

天文台の藤本先生には、自分が計算結果で困惑してしまっている際に多くのアドバイスを頂きました。また、宗宮研定例ゼミなどでは自分の不理解に気付かされ、本当にたくさんのことを学ぶことができました。

研究室の皆様にも大変お世話になりました。同期である粕谷さんからは、研究に対する熱心な姿勢と物怖じしない意思の強さを学びました。また、自分が卒業論文の執筆で困っているときなどには、多くの助言をもらいました。本当に感謝しています。修士1年の久富君と草柳君は、研究のことではないプライベートな会話もたくさん楽しませていただきました。4年生の小田部君と中島君には輪講やゼミの発表などで4年生とは思えないほどの鋭い意見を頂き、自分の理解をより深めることができました。

卒業された先輩である片岡さん、熱田さん、須佐さんにも大変お世話になりました。修士1年のときに片岡さんから教わった多くの知識、ものの見方がなければ、修士論文の執筆は叶わなかったと思います。片岡さんの知識の深さと広さにはいつも驚嘆するばかりで、自分の目標の姿として熱心に研究に従事することができました。熱田さんには、研究で辛いことなどがあった際にいつも助けていただきました。富山出張中の「いつもより多めに曲がっております」という熱田さんの名言は一生忘れません。須佐さんには、卒業論文の際には勿論、修士になってからも様々な相談に乗っていただきました。卒業論文前の辛い日々を乗り越えることができたのは須佐さんのおかげです。本当にありがとうございました。

最後に、家族で唯一大学院へ進学したいという私の意志を尊重してくれ、無条件に今まで大切に育ててくださった私の家族に心からの感謝の言葉を述べ、この謝辞を閉じたいと思います。